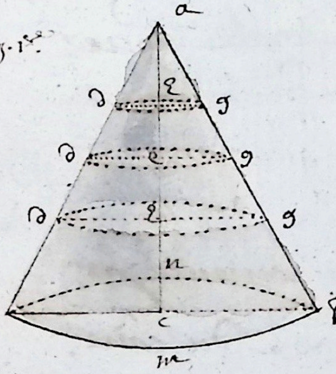
Traité analytique des Sections coniques.

§ 1.

Des Sections Coniques Considérées dans le Cône.

Fig. 1re



1. Soit un Δ rectangle aBc. Sur tous les points du côté ac, soient élevées des perpend. De terminées par l'autre côté aB. et paralleles à la base Bc. Si on fait tourner ce Δ sur son côté fixe ac, la fig. décrite par ce mouvement sera un cône dont la surface a été produite par le côté aB, la solidité par ses paralleles De qui sont les rayons d'autant de tranches circulaires dont le cône est composé.

Le point a est le sommet du cône, le cercle Bfmn est la base, la droite ac qui est au centre de la base est l'axe.

2. Il y a 2 especes de cônes; le droit, et l'oblique ou scalêne. un cône est droit quand son axe est perpendiculaire au plan de la base; il est scalêne, quand son axe est incliné sur le plan de la base.

3. De cette génération du cône, il suit, 1°: que toutte ligne droite AF, menée du sommet A, à un point quelconque de la circonférence de la base, est nécessairement sur la surface convexe du cône; car elle n'est autre chose que le coté AB du Δ générateur, lorsqu'en tournant, il est parvenu a la position AF. 2°. que toutte ligne droite qui du sommet A aboutira a un point pris en dedans; ou en dehors de la base est en

dedans ou en dehors du cône.

Théorême 1er. fig. 1ere

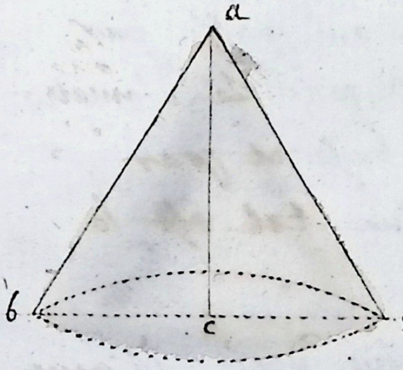
4. Toutte section du cône faitte par un plan qui passe par le sommet et par la base, est un triangle.

Démonstration.

1°. par la formation du cône, les lignes ab, af qui sont les sections du plan coupant et de la surface du coné sont des lignes droites. (400 géom.). la ligne bf est par la même raison une ligne droite, puisque c'est la section du plan coupant avec le plan de la base donc la fig. abf est un triangle.

Si le plan coupant passe par le sommet a, et par l'axe, la section est un

fig. 1re



triangle perpendiculaire au plan de la base dans un cône droit. (413 Geom.). et incliné sur la base dans un cône oblique.

5. Le triangle par l'axe, est la commune section du cône et d'un plan qui passe par le sommet a, par le diametre bf de la base et par l'axe du cône tel est le Δ abf.

6. Dans un cône droit, il peut y avoir plusieurs triangles par l'axe qui sont tous perpendiculaires à la base du cône. mais dans un cone oblique, il ne peut y en avoir qu'un seul que l'on détermine en abaissant du sommet une perpendiculaire al sur le plan de la base

fig. 1re.

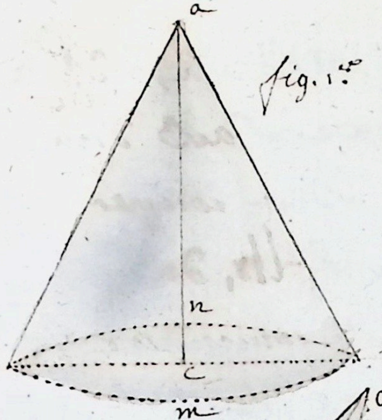


fig. 2e.

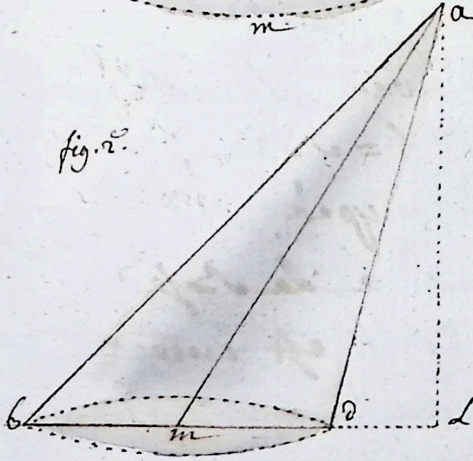
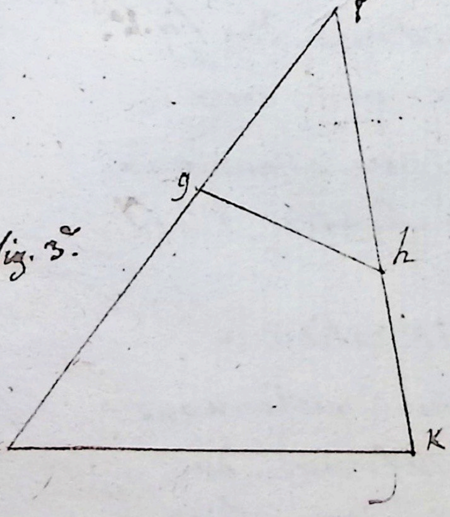


fig. 3e.



BD prolongée, s'il le faut, et en faisant passer un plan aLM par cette ligne, et par l'axe du cone. (fig. 2e.) —

Théorème 2e. fig. 1re.

7. Toutte section du cône faitte par un plan parallele à la base, est un cercle.

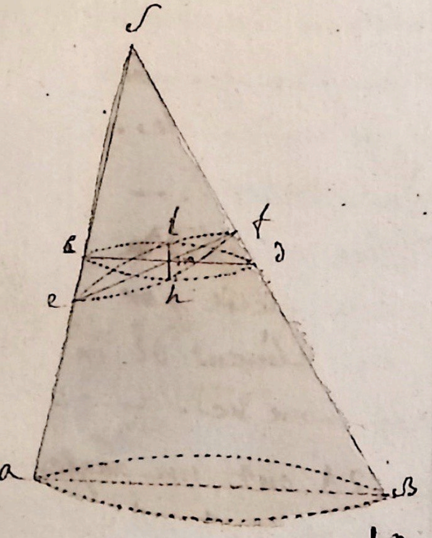
Démonstration. —

Cette section ne differera pas du cercle décrit par quelqu'un des élémens de du Δ gnateur. Donc &c. —

8. Lorsque 2 Δ ont un angle f commun et 2 bases qui forment avec les côtés des angles égaux, l'un d'un côté, et l'autre de l'autre, sçavoir l'angle g = h, et k = g, les 2 bases gh, ik sont antiparalleles.

9. donc si les cotés Sa, SB d'un Δ par l'axe SaB d'un cone Scalène sont coupés par un plan Efhl, de manière que la commune section Ef de ce plan et du Δ fassent avec le coté Sa l'angle SEf = SBa, ces cotés sont coupés antiparallelement a la base et la coupe Efhl est une section antiparallelle ou souscontraire.

fig. 1.re

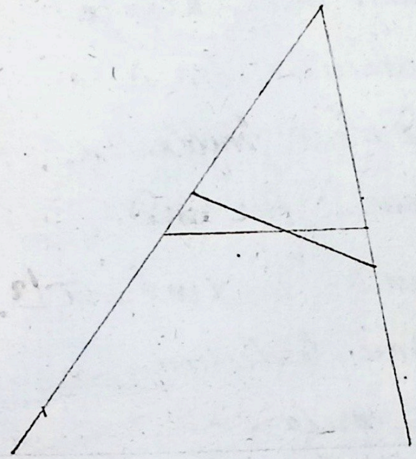


Theoreme 3.e fig. 1.re

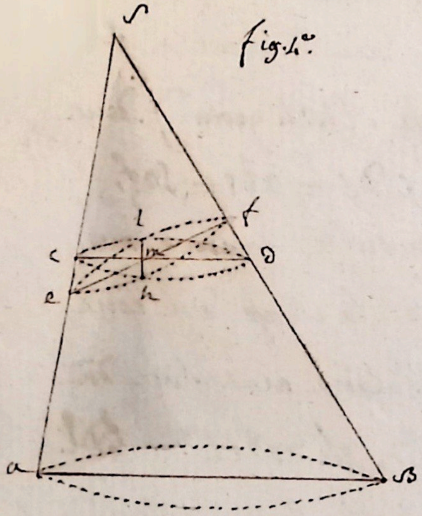
10. Si on coupe un cone Scalène antiparallelement a sa base, la section Ehfl est un cercle.

Demonstration

Par un point quelconque h de la circonference du plan souscontraire, faittes



passer un plan parallelle a la base, la section sera un cercle. (2). et son diametre ~~ab~~ Dc sera parallelle au diametre ab de la base. (424 geom.). donc l'angle cDs = abs = sef, (Supp.). ensuite comme on suppose la base du cône perpendiculaire au plan du Δ saB, le cercle chDl sera aussy perpendiculaire au triangle saB. donc la commune section LMh des 2 plans chDL, Ehfl sera aussy perpendiculaire au plan du Δ saB. ~~et~~ (428 geom) et parconsequent aux lignes Ef, CD qui sont dans le plan du triangle. (406. géom.) or Dc

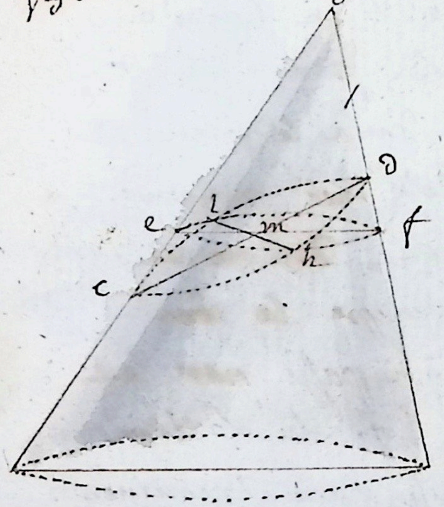


étant un diamètre, et Lh une corde, cette corde ~~[illegible]~~ est coupée par le milieu en M. (83 géom). mais à cause de l'antiparallélisme les Δ emE, fmD sont semblables. donc cm : em :: fm : mD. ainsi $cm \times mD = Em \times mf = mL^2$. (334 geom.) donc la section efLh est un cercle. —

Théo. 4e. fig. 5e. —

11. Si on coupe un cône scalène de manière que la section chDL ne soit parallèle, ni antiparallèle à la base du cône, c'est-à-dire que l'angle scD soit plus grand ou plus petit que l'angle aBs, la section ne sera pas un cercle.

fig. 5e.



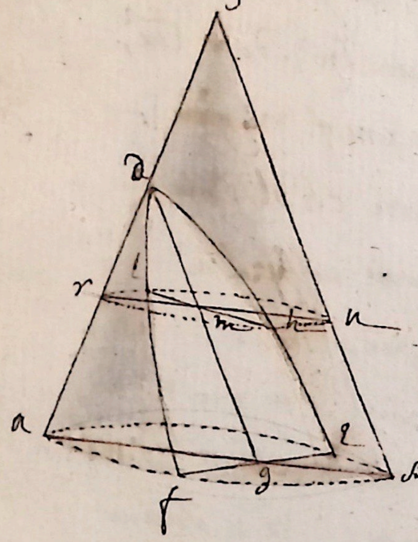
DÉMONSTRATION.

Par le point m de CD, faites passer un plan antiparalelle à la base aB, la section Efhl sera un cercle (10). donc lm^2, ou mh^2 = em x m f. (334 géom). or si la figure ChDL etoit un cercle, on auroit aussy lm^2 = cm x m d; parconsequent em x fm, egaleroit cm x m d. ainsy Em seroit à cm :: md : mf. donc les Δ cml, fmD seroient semblables. (492 geom.). donc les angles mlE, m d f seroient egaux. donc l'angle CDS egaleroit l'angle fES. (34 géom.). mais l'angle fES = aBS, (hypot) donc l'angle CDS egaleroit aBS. donc CD seroit paralelle à aB. (65 géom). ce qui est contre l'hypotese. donc la section ChDL ne peut pas

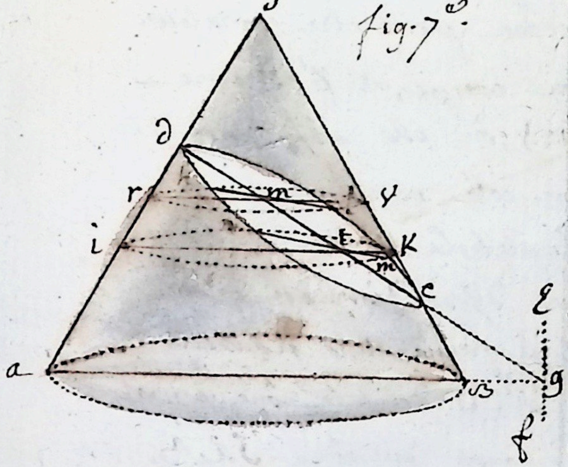
etre un cercle. donc &c.

12. Soit un Δ quelconque par l'axe SaB, et dans ce Δ une droite Dg parallelle a l'un de ses cotés SB. par le point g soit elevée dans le plan du cercle aEBf une perpend. Ef au diametre du meme cercle. si on coupe le cône par un plan qui passe par les droites Dg, Ef, la section sera une surface terminée par une courbe EhDLf que l'on nomme Parabole.

fig. 6.e



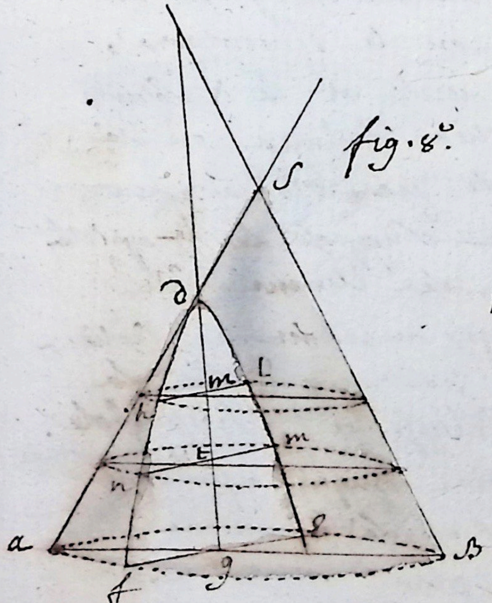
13. Soit encore un triangle par l'axe quelconque SaB dont les 2 cotés Sa, SB sont coupées par une droite DC, toutes 2 au dessous, ou d'un audessous, et l'autre audessus du sommet S; par le point G ou cette ligne rencontre la base aB du triangle par l'axe prolongé.



fig·7e.

autant qu'il sera necessaire,
Soit élevée dans le plan
du cercle ABf une perpend.
Ef, au diametre AB; si on
coupe le cône par un plan
qui passe par les droites
DG, Ef, la section sera une
surface terminée par une
courbe DhmcnL que l'on a
nommée Elipse, ou par une
courbe Dhcfl a laquelle
on a donné le nom

D'hiperbole.



fig·8e.

Corollaire.

14. Donc il n'y a que 5 manières differentes de couper le cône, et par consequent il ne peut y avoir que 5 especes differentes de sections coniques.

Démonstration.

ou la section passe par le sommet, ou non; si elle y passe, c'est un triangle (4). si elle n'y passe pas, ou elle coupe les 2 cotés et alors c'est un cercle ou une Elipse. c'est un cercle si la section est paralelle a la base (7). c'est une elipse, si la section n'est paralelle

ni antiparallelle a la Base (11). ou elle ne coupe qu'un coté, ~~c'est~~ alors la section peut etre paralelle au côté non coupé, et c'est une parabole (12), où elle n'est pas paralelle au coté non coupé, et c'est une hyperbole. (13). mais dans cette derniere disposition du plan coupant, il se forme une nouvelle hyperbole PCO dans le cône opposé par le sommet au cône SAB, laquelle est semblable et egale a la 1ere comme on le démontrera.

15. Quoique le cercle et le Δ soient parmi les sections coniques, on ne les y compte pas ordinairement, parcequ'on en suppose les propriétés comme dans les Elemens de Geometrie, ainsy on réduit les sections coniques aux 3 autres, savoir, la Parabole, l'élipse et l'hyperbole.

Une section conique est donc une ligne courbe qui est la commune section d'un plan et de la superficie d'un cône. —

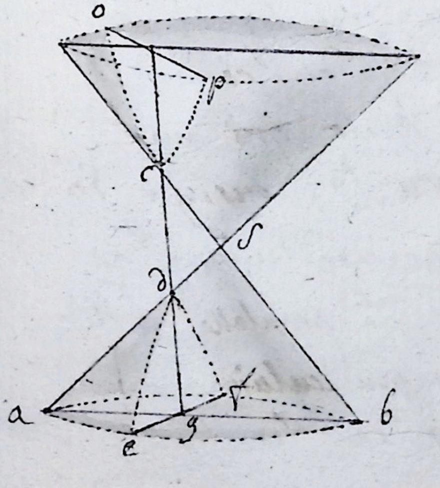
16. La ligne DG commune section d'un triangle par l'axe et du plan coupant s'appelle diametre

de la courbe, et axe lorsque l'angle DGL est droit; ce qui arrive toujours dans un cône droit, et ne peut avoir lieu dans un cône oblique que lorsque le triangle par l'axe est perpendiculaire a la base.

17. Les droites LeH, LK menées d'un point de la courbe au diametre DG parallellement a Lg sont nommées ordonnées ou appliquées au diametre.

18. Les points D, C ou le diametre de la courbe rencontre les cotés du Δ par l'axe sont les sommets de la Courbe, ou les origines du diametre, d'ou il suit que la parabole ne peut avoir qu'un sommet, et son diametre qu'un origine.

fig. 8e.



19. Les parties DM, DG du diametre, comprises entre l'origine du diametre et une ordonnée quelconque sont apellées

abscisses ou Coupées. L'abscisse avec l'appliquée correspondante soit nommée ensemble Coordonnées.

20. Théorême 5e. fig. 6e.

20. Dans une Parabole les quarrés des ordonnées hm, Eg au diamètre Dg, sont entre eux comme les abscisses correspondantes DM, DG.

Demonstration.

Par un point h de la courbe soit imaginé un plan hrul paralelle a la base du cône, la section sera un cercle qui aura pr. diamètre ru. (7). ensuite Eg etant (const.) perpendiculaire au diamètre Dg, la paralelle LM sera aussy perpendiculaire au diametre D.g. donc les lignes hml, Egf seront coupées en 2 egalement aux points M, G. (83 géom), et leurs moitiés seront des ordonnées aux cercles rhul, AEfB. donc on aura pr. l'un:

$\overline{hm}^2 = rm \times mv$, et p^r. l'autre

$\overline{eg}^2 = ag \times Bg$ (334 géom). donc

$\overline{hm}^2 : \overline{eg}^2 :: rm \times mu : ag \times Bg$.

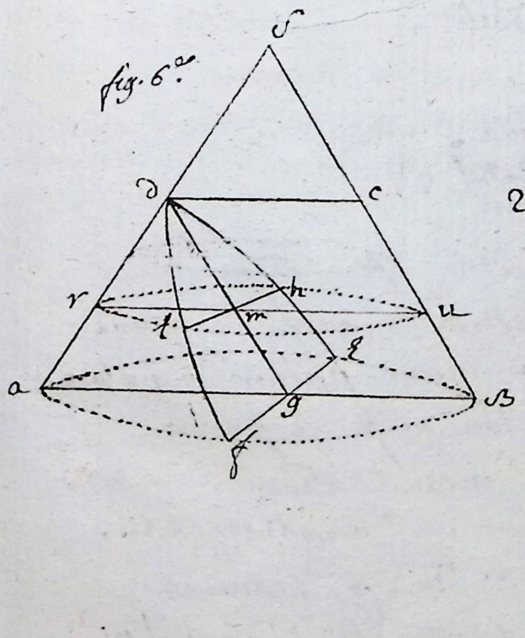
mais à cause des paralleles SB, DG, (Sup.), les lignes MU, Bg sont egales ; donc on aura

$\overline{hm}^2 : \overline{eg}^2 :: rm : ag$. en divisant le dernier raport par MV et Bg. or les Δ semblables RDM, aDg donnent :

$Rm : ag :: Dm : Dg$. donc

$\overline{hm}^2 : \overline{eg}^2 :: Dm : Dg$. donc &c.

fig. 6e.



Théor. 6e. fig. 6e.

21. Dans une parabole, le quarré d'une ordonnée quelconque est egale au rectangle de l'abscisse correspondante par le paramètre.

Démonstration.

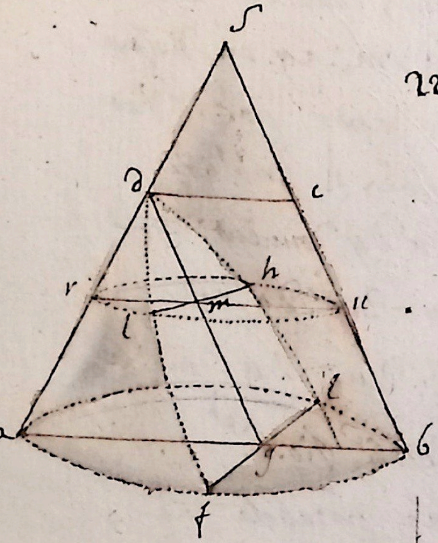
Soit pris sur le coté SB la partie SC = MV. par le point C soit menée CD paralelle à aB, je disque $DM \times CD = \overline{HM}^2$ ou $\overline{LM}^2$. Soit $Dc = p$, $DM = x$.

$lm = y$. Les triangles semblables SDc, Dmr donnent $Sc : cD :: Dm : mr$. donc $Sc = mu \times mr = Dc \times Dm$. mais $mu \times mr = \overline{lm}^2$. (334 géom). donc $Dc \times Dm = \overline{lm}^2$. c'est-à-dire $px = yy$. donc &c.

Corol. 1.er

22\. La ligne $cD = P$ est apellée le paramètre de l'axe DG. or puisque $Px = yy$; donc $x : y :: y : P$. ce qui fait voir que le paramètre est une 3.e proportionelle à une abscisse quelconque et à son ordonnée correspondante.

fig. 6.e



Corol. 2.d

23\. Le paramètre est une grandeur constante, c'est-à-dire qu'on en trouve toujours la meme valeur de quelque abscisse que l'on puisse se servir.

Démonstration.

~~Soient~~ Soit P et ~~n~~ le paramètre. $Dm : lm :: lm : p$. de meme $Dg : fg :: fg : n$. (22.). donc $\overline{lm}^2 = Dm \times p$. $\overline{fg}^2 = Dg \times n$. donc

Autre démonstration de l'art. 21. pour trouver le paramètre.

" Soit $Dc = c$
" $Dm \ldots x$
" $DS \ldots D = Sc$
" $Am = u$
" $mr \ldots o$
" $ab \ldots b$
" $aS \ldots f$
" $Sb \ldots g$
" $ml \ldots y$
" Par la propriété du cercle, $y^2 = ou$.
" mais $g : b :: x : u$. donc $u = \frac{bx}{g}$. $Dc = mu$.
" donc on aura $g : b :: D : \frac{g}{o}$. ainsi

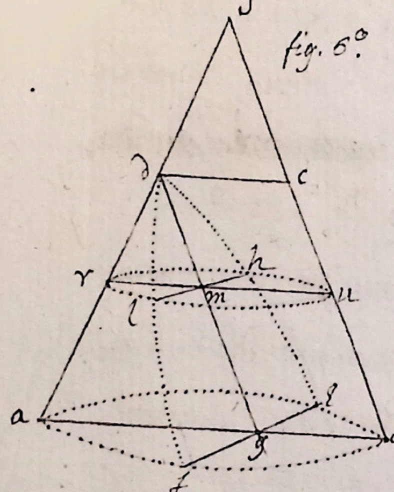
" $o = \frac{bD}{g}$. àpresent si on substitue
" ces valeurs de O et U dans la premiere
" equation, on aura $yy = \frac{b^2 dx}{g^2}$: et
" comme les quantités b, d, g sont
" toujours constantes pour toutes les
" ordonnées de cette parabole, on peut
" faire $\frac{b^2 d}{g^2} = L$ = le paramètre; ce qui
" donnera $yy = Lx$, propriété de la
" Parabole. c. q. f. D.

autrement.

" $yy = ou$. mais $D : c :: x : \frac{cx}{D}$
" $= u$, et $D : c :: D : \frac{Dc}{D} = c = o$. donc
" $yy = ou$ est egal à $yy = \frac{c^2 x}{D}$ et
" faisant $L = \frac{c^2}{D}$, on aura $yy = Lx$.
" mais comme l'on a le param.
" $L = \frac{c^2}{D}$, on aura $LD = c^2$. d'ou
" l'on tire cette analogie; $D : c :: c : L$.
" et de l'equation $yy = Lx$, on
" tire $x : y :: y : L$, ou le parametre
" est la 3e. ppnelle à l'abcisse et
" à son ordonnée. C. Q F. D.

$\overline{LM}^2 : \overline{FG}^2 :: DM \times P : DG \times N ::$ ~~DM : DG.~~ ~~ainsy Dm x p~~ Or $\overline{Lm}^2 : \overline{fg}^2 :: Dm : Dg$. (20) donc $Dm \times p : Dg \times n :: Dm : dg$. ainsy $Dm \times p \times Dg = dg \times n \times Dm$. si vous divisés ~~par Dm, multipliées par Dg,~~ par $Dm \times dg$, il restera $p = n$, ce qui fait voir que $P = N$, en quelqu'endroit que tombent sur l'axe les points m, g; c'est-a-dire que le paramètre est toujours le meme quelqu'abcisse que l'on puisse prendre. donc c'est une grandeur constante au lieu que les ordonnées et les abscisses sont apellées variables, parcequ'elles sont indeterminées.

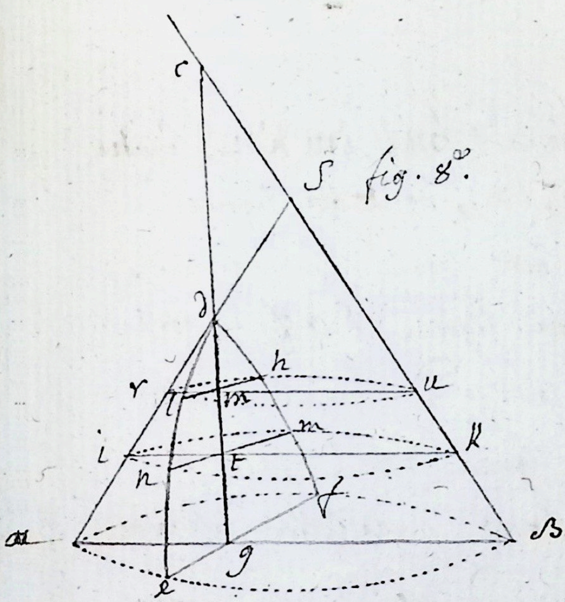
Les anciens apelloient cette 3e. ppnelle, Latus rectum, les modernes luy ont donné



le nom de parametre, parce que cette ligne est une espèce de module qui détermine les dimensions de la parabole en quelque point quon la prenne. sans cette ligne qui se trouve déterminée par la nature de la section, il seroit difficile de ~~déterminer~~ construire la parabole e independament du cone, du moins on ne pouroit pas en fixer les dimensions puisque les ordonnées et les absisses sont indeterminées.

Corollaire.

24. Léquation $Px = yy$ est léquation qui caracterise la parabole, et doù cette courbe a tiré son nom. car le mot grec, παραβαλλειν, — signifie <u>égaler</u>. donc si dans la résolution dun probleme, il arrive que le quarré dune ordonnée, ou dune perpend. quelconque LM à une ligne DG dont l'origine



est fixe soit égale au rectangle de l'absisse DM par une constante P, on pourra s'assurer que les extremités de ~~toutes~~ les ordonnées sont à une parabole; et quainsy pr. avoir la solution du probleme, il faudra construire une parabole.

Théoreme 7e. fig. 7e et 8e.

25. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole les lm^2, nt^2 de 2 ordonnées quelconques lm, nt à un diametre Dg, sont entre eux comme les produits $DM \times cm$, $Dt \times ct$ des absisses dm, cm, Dt, ct correspondantes a ces ordonnées.

Demonstration.

Par les ordonnées lm, nt, soient ~~tirés~~ des plans $rhul$, ~~l~~, $imkn$ paralleles au plan de la base du cône;

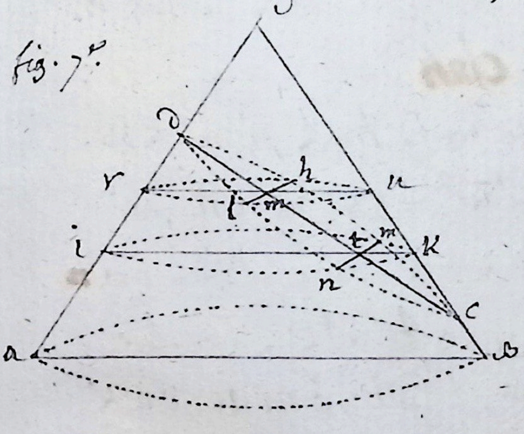
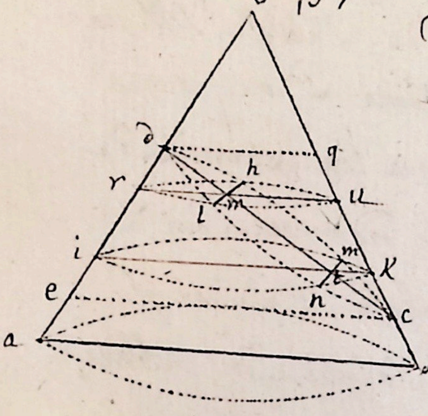


fig. 7e.

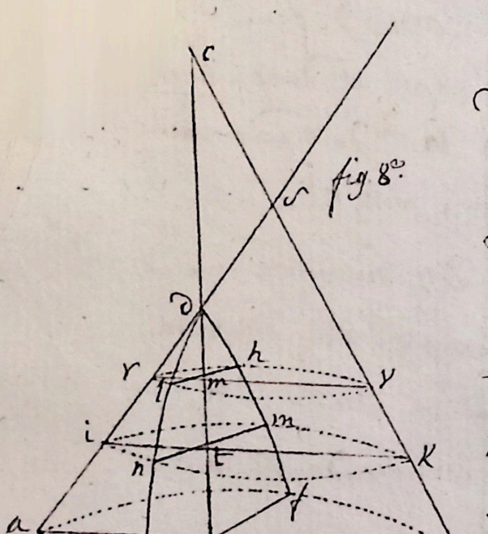


Les sections rhul, imkn seront des cercles, (7), dont les lignes ru, ik sont les diametres. ensuite les lignes Egf etant (par cons) perpend. au diametre aeb, les lignes hml, mtn qui leur sont paralleles seront aussy perpend. aux diamètres ru, ik, donc elles seront coupées en 2 egalement par ces diamètres, et par celuy Dc de la courbe ~~clnh~~ Dm. cela posé; Les cercles rhul, imkn donnent $\overline{lm}^2 = rm \times mu$, et $\overline{tn}^2 = it \times tk$. donc $\overline{lm}^2 : \overline{tn}^2 :: rm \times mu : it \times tk$. or les Δ mDr, tDi, cmu, ctk sont semblables à cause de leurs bases paralleles ru, ik et donnent ces 2 analogies

$rm : ti :: Dm : Dt$

$mu : tk :: cm : ct.$

fig 8e.



donc en multipliant ces

Probleme,

" trouver l'équat. au paramètre " dans l'Ellipse.

Solution.

" Soit $Lm = y$

$Dc \ldots a$

$cm \ldots x$

$aS \ldots c$

$BS \ldots d$

$aB \ldots f$

$Dq \ldots g$

$ce \ldots h$

$Dm \ldots a-x$

$rm \ldots o$

$mu \ldots u$

$P \ldots$ le Paramètre.

" Par la proprieté du cercle, on a

" $\begin{cases} \overline{Lm}^2 = mu \times mr. \\ yy = u \times o. \end{cases}$

mais

" $\begin{cases} Dc : Dq :: cm : mu \\ a : g :: x : u \end{cases}$

donc

" $\begin{cases} mu = \dfrac{dq \times cm}{Dc} \\ u = \dfrac{gx}{a} \end{cases}$

de même

$\begin{cases} Dc : ce :: Dm : mr \\ a : h :: a-x : o \end{cases}$

donc

$\begin{cases} mr = \dfrac{ce \times Dm}{Dc} \\ o = \dfrac{ah-hx}{a} \end{cases}$

" si on substitue cette valeurs " dans la premiere Equation, elle " deviendra $\overline{Lm}^2 = \dfrac{dq \times cm \times ce \times Dm}{Dc^2}$,

2 proportions par ordre, — on aura : $rm \times mu : ti \times tk :: dm \times cm : Dt \times ct$. donc on aura $\overline{Lm}^2 : \overline{ta}^2 :: dm \times cm : Dt \times ct$. donc &c. —

Cor. 1er.

26 Dans L'élipse le quarré d'une ordonnée quelconque au grand axe CD est au rectangle des abscisses correspondantes, comme le quarré du demi petit axe est au quarré du demi grand axe. —

Démonstration.

Sur le milieu de l'axe CD soit élevée la perpendiculaire MN terminée a la circonference de l'élipse; cette ligne est nommée le petit axe, sa moitié nt devient une ordonnée au grand axe. Soit $CD = 2a$. Dt ou $Ct = a$. $mn = 2B$. $nt = tm = B$. $Lm = y$. $tm = x$. $Dm = a-x$. $Cm = a+x$.

or (25) $2\overline{im}^2 : \overline{ta}^2 :: dm \times cm : dt \times ct$. c'est-à-dire $yy : BB :: aa - xx : aa$, et alternando : $yy : aa - xx :: BB : aa$. donc &c.

Cor. 2e.

27. D'où l'on tire cette équation. $aa - xx = \frac{aayy}{BB}$, ou cette autre $yy = BB - \frac{BBxx}{aa}$, ou $\overline{aa - xx} \times \frac{BB}{aa}$; ces équations expriment d'une manière générale toutes les propriétés des coordonnées de l'ellipse rapportée à son 1er axe, en supposant, comme on a fait icy, que l'origine des x est au centre.

Cor. 3e. fig. 8e.

28. dans l'hyperbole le quarré d'une ordonnée quelconque au 1er axe est au rectangle des abscisses correspondantes, comme le quarré du 2e axe est au

" c'est-à-dire $yy = \frac{ahgx - x^2hg}{a^2}$
" mais comme les lignes dq, ce, cd, c'est-à-dire g, h, a, sont constantes, on peut mettre L à la place de $\frac{dq \times cl}{cd}$ ou $\frac{hg}{a}$ dans la dernière équat. qui deviendra $\overline{Tm}^2 = \frac{cm \times dm \times L}{Dc}$
" ou $yy = \frac{x \times \overline{a-x}}{a} \times L$, ou en multipliant effectivement, on aura $yy = \frac{\overline{ax - xx} \times L}{a} = \frac{Lax - Lx^2}{a} = Lx - \frac{Lxx}{a}$.

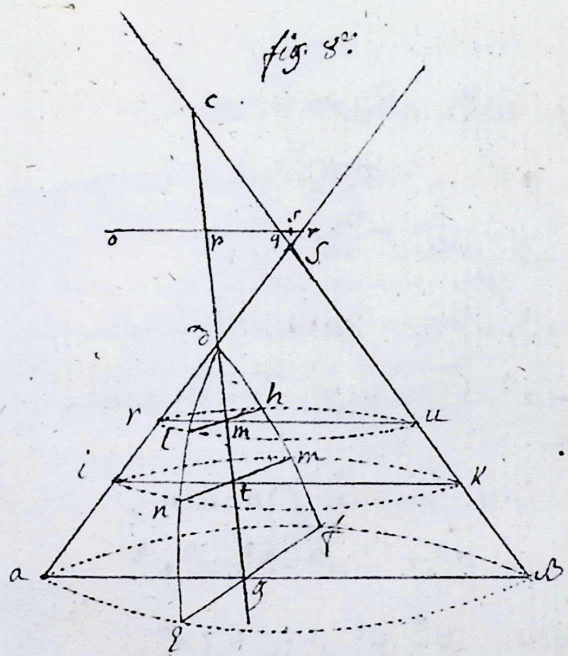
Corollaire 1.

" donc on aura toujours $y^2 = Lx - \frac{Lx^2}{a}$.
" ou P = au paramètre sera $= \frac{hg}{a}$. c'est-à-dire, que le paramètre de l'ellipse sera égal au produit de deux lignes qui sont les diam. de 2 cercles qui coupent le cône parallèlement à la base au dessus et au dessous de l'axe de l'ellipse, divisé par l'axe de l'ellipse. &c
" N.a 1° de l'équation $L = \frac{gh}{a}$, on tire $hg = ap$, ou $a : h :: g : p$.
" 2°. si $x = \frac{a}{2}$, alors y = $\frac{1}{2}$ petit axe. donc si on subst. cette valeur dans l'équation $yy = px - \frac{px^2}{a}$, on aura $yy = \frac{La}{2} - \frac{La^2}{4a} = \frac{La}{2} - \frac{La}{4} = \frac{2La - La}{4} = \frac{La}{4}$. donc on a $4y^2 = La$ ensuite $2y = \sqrt{La}$. mais $p = \frac{gh}{a}$. donc $La = gh$. donc $2y = \sqrt{pa} = \sqrt{gh}$. ./:

quarré de la 1re ———

Démonstration.

Sur le milieu de CD soit élevée la perpend. Pqr terminée par le côté Sa prolongé du cône et paralelle a la base AB. Soit trouvée une moyenne proportionnelle PS entre Pr et Pq. je dis que $hm^2 : Dm \times cm :: \overline{ps}^2 : \overline{PD}^2$. Soit $Dp = a$. $PS = b$. $pr = g$. $pq = f$. et les variables $pm = x$. hm ou $lm = y$ Dm sera $x-a$ et $cm = x+a$. cela posé; les triangles semblables cpq, cmu, Dpr, Dmr donnent: $cp : pq :: cm : mu$. c'est-a-dire $a : f :: x+a : \frac{fx+fa}{a} = mu$, et $Dp : pr :: Dm : mr$. c'est-a-dire: $a : g :: x-a : \frac{gx-ag}{a} = mr$. or $\frac{fx+fa}{a} \times \frac{gx-ag}{a} = \frac{gf\,xx-aafg}{aa}$



fg

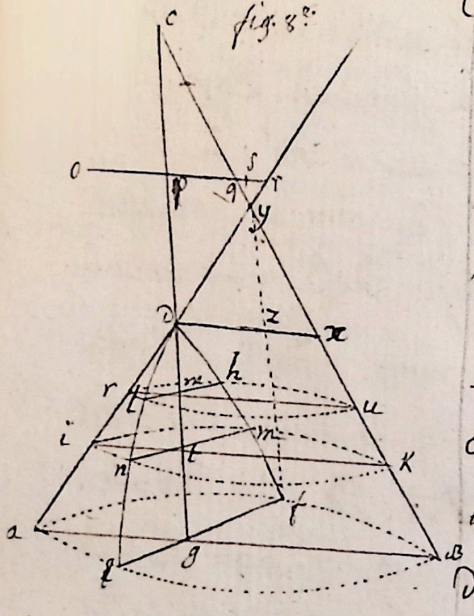
$= mr \times mu = hm^2 = yy$. ~~aa~~

(334 géom). ensuite (const) $pr : ps :: ps : pq$. c'est-à-dire $g : b :: b : f$. donc $gf = bb$. donc mettant a la place de gf sa valeur bb, l'on aura

$$\frac{bbxx - a^2b^2}{aa} = yy.$$

dégageant cette équation de sa fraction, il viendra, $b^2x^2 - a^2b^2 = a^2y^2$. d'ou l'on tire $y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2$. donc &c.

fig. 8e



Cor. 4e.

29. D'ou l'on tire cette equation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ ou cette autre $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ qui exprime la nature de l'hiperbole considérée par rapport a son axe, en comptant l'origine des x au centre p.

Probleme

" Trouver le Parametre d'une
" l'hyperbole.

Solution.

" soit $Dm = x$
$Dc \ldots a$
$Dx \ldots c$
$mL \ldots y$
$mr \ldots o$
$mu \ldots u$
$yz \ldots \frac{a}{2}$
$Dz \ldots \frac{c}{2}$

" Par la propriété du cercle
" $y^2 = ou$. on aura $\frac{a}{2} : \frac{c}{2} :: x : u$.
" donc $u = \frac{cx}{a}$. et $a : c :: a+x : o$.
" donc $o = \frac{ca+cx}{a}$. Substituant
" ces valeurs de u et de o dans
" la premiere equation, on

" aura $y^2 = \frac{c^2ax + c^2x^2}{a^2}$ et
" faisant $\frac{c^2}{a} = p$ ou le paramètre,
" il viendra ~~[illegible]~~ $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$
" propriété de l'hiperbole.
" N.ta Puisque $\frac{c^2}{a} = p$, on
" aura $c^2 = ap$, d'où on tire cette
" analogie $a : c :: c : p$ ou le
" parametre est la 3e. pp.nelle
" à l'axe Transversa et à
" l'axe conjugué. ./.

30. Remarquée. Si vous prenez $po = ps$, la ligne so menée par le milieu p de l'axe CD parallellement a l'ordonnée hL est apellé le 2d. axe de l'hiperbole ou l'axe conjugué a l'axe CD.

31. Les équations que l'on vient de trouver expriment les principales propriétés des 3 sections côniques considérées par raport a leurs axes. on pouroit aisément démontrer un grand nombre d'autres propriétés des mêmes courbes en les supposant toujours dans le Cône. mais on ne s'est proposé que de faire voir comment elles y ont pris leurs origines et leurs noms. on les supposera dans la suite décrite sur des plans et l'on verra quelles sont precisement les memes que celles qu'on coupe dans le cône, parconsequent

on peut leur donner les mêmes
noms, mais auparavant que de
traiter de chacune en particulier,
il faut expliquer ~~leque~~ en peu
de mots ceque l'on ~~a~~entend
par ~~fon~~ l'équation d'une courbe.

32. on apelle fonction d'une quantité
ce quelle devient quand on fait
sur elle certaines operations.

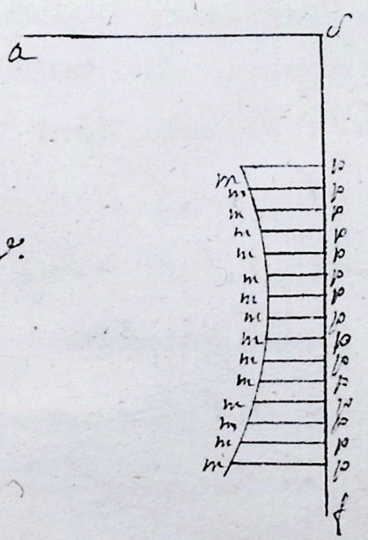
Par exemple; si on Multiplie
la grandeur a par M, si on la
divise par B, si on l'eleve à
une puissance S, ou si on en
prend la racine X, les
differentes expressions analytiques
des quantités Ma, $\frac{a}{B}$, a^S,
$\sqrt[x]{a}$ dans lesquelles elle se change
par ces operations sont des
fonctions de cette quantité.

De plus si l'on combine
ces fonctions entre elles, ou
avec une autre quantité,
par addition, soustraction,

multiplication, division &c. Les résultats sont encore les fonctions de la meme quantité.

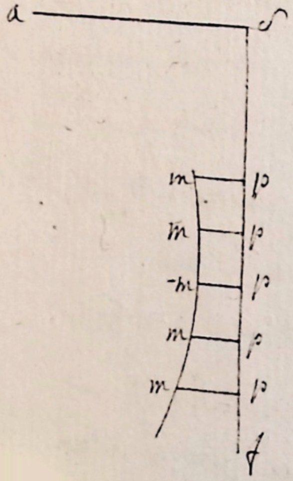
33. On considere ordinairement une courbe plane comme une suite de points tracés par un point mobile sur un plan. or pr. résoner sur la nature et les propriétés de cette courbe; il faut que cette suite de points M, M, &c. soit déterminée d'une maniere uniforme a Légard de deux droittes AS, Sf differement posées sur ce plan, ou que quelques mêmes fonctions de chaque droitte Mp soit a quelque meme fonction de La droite Sp correspondantes dans un certain rapport constant. donc il faut que le point mobile qui décrit la courbe se meuve en suivant toujours une certaine meme loy dans les angles infiniment petits de ses détours.

fig. 9e.



34. L'équation algébrique qui exprime cette loy, ou le raport constant de chaque MP à chaque SP, s'apelle l'équation à la courbe. La droite Sf à laquelle aboutissent toutes les paralleles MP, s'apellent la ligne des absisses, parcequ'on apelle absisses, ou coupées les parties SP, SP &c. de cette ligne.

fig. 8.

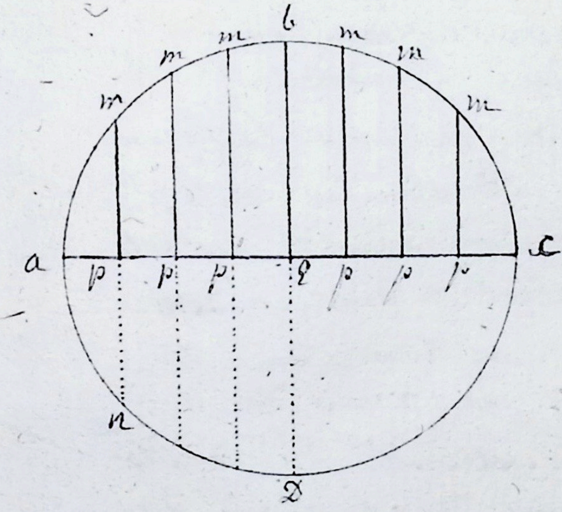


Le point S par lequel passe la droite aS est l'origine des absisses. Les paralleles MP à la droite aS sont nommées les ordonnées, ou les appliquées.

On désigne ordinairement les ordonnées des courbes par y et leurs absisses par x, ensorte que l'on dit les x et les y d'une courbe, pr. dire ses absisses et ses ordonnées.

35. Pr. éclaircir ces notions : Soit un cercle quelconque dont le

fig. 10e.



diamètre est ac ; et ~~l'ordonnée~~ l'origine des coordonnées ap, pm a l'une des extrémités a du diamètre, soit ac = 2a. ap = x, pm = y. cp sera 2a-x. or on sait (334 géom.) que l'on a pr. une ordonnée quelconque pm ; $\overline{pm}^2$ = ap × cp. donc en mettant les expressions algébriques de ces lignes, on trouvera cette équation : yy = 2ax − xx qui est l'équation au cercle parce quelle exprime l'égalité constante entre une même fonction de chaque ordonnée, (c'est son quarré) et une même fonction de chaque absisse correspondante, (c'est son produit par le reste du diamètre).

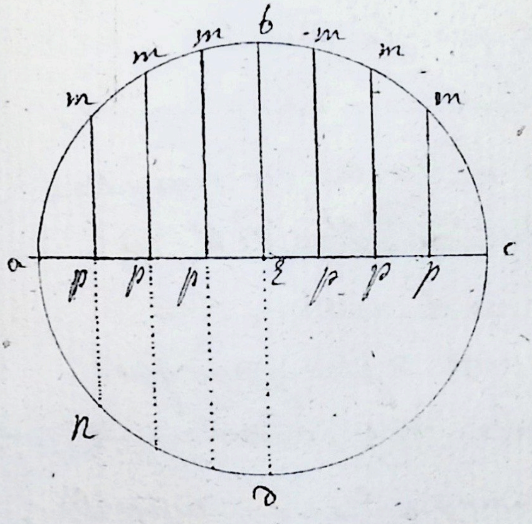
36. De là il est évident que chaque ordonnée d'une courbe et chaque absisse correspondante doivent etre des quantités indeterminées ou variables,

mais dévuisibles l'une de l'autre par les diverses suppositions de grandeur que l'on fait a l'une des 2, et par les grandeurs déterminées ou constantes qui sont contenues dans l'équation. d'où l'on peut décrire facilement la courbe. ainsy dans l'équation du cercle; 2a doit etre une quantité constante ou invariable. si donc $x = zero$, ou $x = 2a$, on trouvera dans l'un et l'autre cas: $\pm y = 0$. d'où il suit qu'aux extremités du diamètre ac, les points de la courbe se confondent avec les memes points a, c, puisque les distances des points de la courbe au diamètre sont egales a zero.

Si l'on fait $x = a$, l'on trouvera $yy = aa$. ainsy $y = \pm a$. d'où il suit que les points M, r qui deviennent BD, se trouvent toutes 2 eloignés du centre E d'une quantité egale à CE. le $+a$ marque l'ordonnée positive EB au dessus du diamètre: et le $-a$ désigne l'ordonnée negative

ED qui est au dessous du meme diamètre.

fig. 10.e



37. Si on suppose l'absisse x successivement égale à certaines parties du diamètre, (on les prend p.r une plus grande commodité en progression arithmétique; ou de sorte que les intervalles PP soient egaux:) comme si on faisoit ap ou x successivement egal à ~~[illegible]~~ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. On trouvera par l'equation $yy=2ax-xx$, que les ordonnées correspondantes mp ou y sont successivement: 0, 3, 4, $\sqrt{21}$, $\sqrt{24}$, 5, $\sqrt{24}$, $\sqrt{21}$, 4, 3, 0. de sorte qu'en élevant de chaque point P des perpendiculaires au diamètre ac, et les faisant successivement égales à, 3, 4, $\sqrt{21}$ &c, on aura des points M, par lesquels on pourra tracer une courbe qui sera un demi cercle.

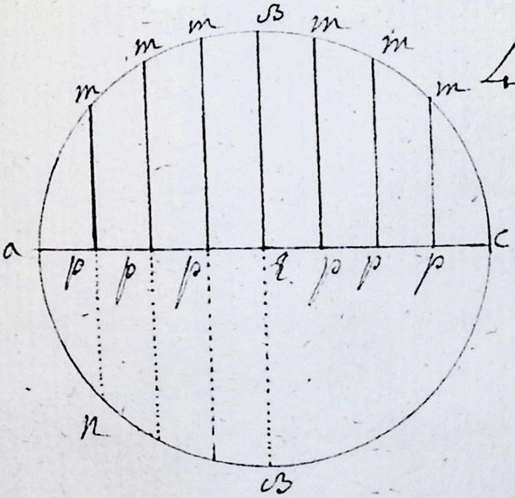
38. Comme l'équation $yy = 2ax - xx$ donne les racines négatives — $-3, -4, -\sqrt{21}, -\sqrt{24}$ &c. aussy bien que les positives, 3, 4 &c, il s'en suit que si sur le prolongement de chaque Mp, on prend a droite du diamètre autant de $PM = PK$, on aura le cercle entier. —

39. Si on suppose x plus grand que $2a$, l'ordonnée corresspondante deviendra imaginaire, ou impossible, parceque $2ax - xx$ sera une quantité negative dont la racine quarrée est impossible, ce qui fait voir que la courbe ne peut avoir aucun de ses points au dela des extremités du diamètre ac. —

40. Remarquez que l'on peut prendre ou l'on veut l'origine des abisses, si on fixe ~~cet~~ origine au centre E, en faisant $EP = x$, $PM = y$. on aura &. —

chaque point P, $yy = aa - xx$ autre équation du cercle et la meme que la précédente dont on déduira les mêmes Conséquences. —

fig. 10e.



41. Les differens dégrés des équations servent à établir les differens genres ou Ordres de lignes. Le degré d'une equation se prend toujours du terme où les indeterminées x et y se trouvent à la plus haute puissance, ou separement, ou par leur Combinaison l'une avec l'autre; Une équation du 1er dégré exprime la ligne droite; chaque autre dégré forme une suite de courbes géometriques d'un même ordre, qui varient neantmoins entre elles suivant les differentes Combinaisons possibles des indeterminées x et y pr. chaque dégré. ces équations servent à décrire les Courbes; mais leur principal ~~objet~~ usage est de fournir des moyens facile de

discuter les Courbes auxquelles elles appartiennent, et d'en faire connoitre les principales propriétés, en donnant successivement des valeurs connues a l'une ou à l'autre des indeterminées pr. avoir la valeur de chacune.

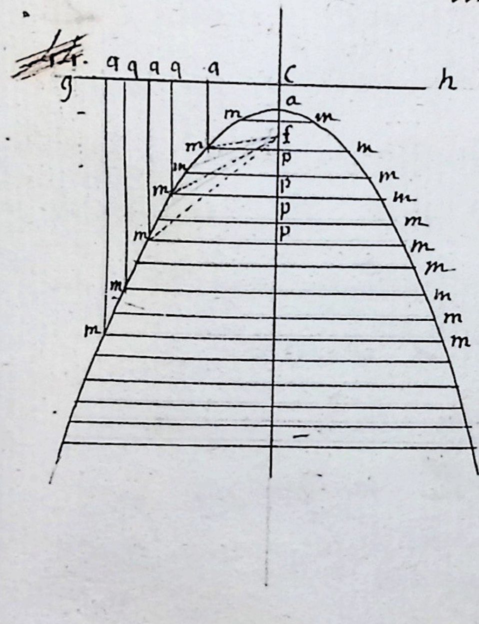
42. En supposant que les Courbes ne sont qu'une suite de points tracés par un point mobile qui se détourne a chaque instant en suivant une certaine loy constante dans la variation des angles infiniment petits de ses détours, il suit,

1°. qu'on ne peut considerer en géométrie de lignes mixtes, c'est-a-dire en partie droites et en partie courbes, parcequ'il n'y auroit point de loy constante dans la marche du point qui la décriroit.

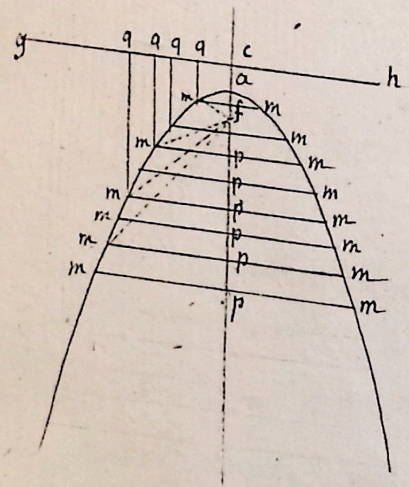
43. 2°. Qu'une droite ne peut toucher une Courbe qu'en un

seul point; car si elle pouvoit la toucher en 2 ou 3 points contigus, le point décrivant ne se seroit pas détourné de sa direction a chaque instant, ce qui auroit interrompu la loy de ses détours.

§. 2. Des propriétés de la Parabole considerée sur un Plan.



44. Soit une droite quelconque indefinie Gh (fig. 11), que lon apelle directrice, et sur le meme plan hors de cette droite un point donné f, que lon apelle foyer; si lon cherche une infinité de points M, tels que les 2 lignes menées d'un de ces points, l'une Mf au foyer f, l'autre Mq perpend. a la directrice Gh, soient egales entre elles, la courbe qui passera par toutes ces points M, est une parabole.



Probleme 1er. fig. 11.

45 Supposant la definition que l'on a donnée de la parabole d'ecrire ~~cette~~ courbe, on trouve autant de points M que l'on voudra.

Solution.

Par le point f, abaissez sur la directrice gh, une perpend. cB, sur laquelle elevez par tous de points que vous voudrez des perpend. indefinies mpm, ensuite du foyer f, comme centre avec un rayon cP, marquez sur chaque indeterminée mpm 2 points m, M la ligne que vous ferez passer par les points trouvés M, M sera une parabole.

Demonstration

du point trouvé m soit abaissée la droite mq perpend. a la directrice. on aura qm = cp acause du rectangle cpmq. or (const) cp = fm;

donc on aura $qm = fm$. donc le point M est a la parabole suivant sa définition. —

Cor.

46. il suit de cette description et de la définition que la parabole passe nécessairement par le milieu a de Cf, puisque dans ce point $ca = af$. —

47. La ligne ap s'appelle l'axe de la parabole. Le point a milieu de cf est le sommet de cette courbe, et l'origine des absisses. —

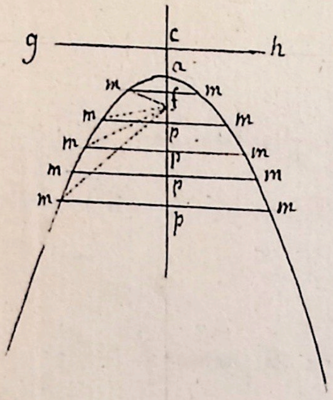
Une droite Mp menée d'un point M de la courbe perpend.^t a l'axe, est une ordonnée à cet axe. La ligne MM s'apelle double ordonnée. —

Les parties Ap de l'axe comprises entre le sommet et la rencontre des ordonnées sont les absisses correspondantes aux ordonnées PM. Une ligne double de cf est le paramètre. —

Une droite qui ne rencontre la parabole que dans un seul point, et qui quoique prolongée de part et d'autre n'entre point dans la courbe est apellée tangente. —

Theo. 1e. fig. 11e.

48. Dans la parabole $\overline{pm}^2$ d'une ordonnée quelconque pm est egale au produit de son absisse ap par le parametre.



Demons.

Soit af ou ac = a le paramétre p double de cf sera 4a. soit ap = x. pm = y. lorsque le point p tombe entre le sommet a et le foyer f, la ligne fp sera a − x. au contraire fp sera x − a, lorsque le point p tombe audela du foyer par raport au sommet a. cela posé, dans l'un et l'autre cas, le Δ rectangle fpm donne, $\overline{pm}^2 = \overline{fm}^2 - \overline{fp}^2$. mais fm = cp = a + x par la construction de la courbe (45). donc on aura, en mettant les valeurs ~~alg~~ analytiques $yy = aa + 2ax + xx - aa + 2ax - xx = 4ax$, ou $yy = px$. puisque p = 4a. donc &c.

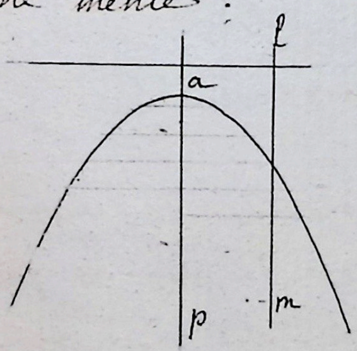
Cor. 1er.

49 de là il suit que les quarrées des ordonnées sont entre-eux comme les abscisses correspond.tes Lis soit y une ordonnée quelconque dont l'abscisse est x, et z une autre ordonnée dont l'abscisse est s, on aura pr. la 1ere $yy = px$. et pr. la 2e. $zz = ps$. donc $yy : zz :: px : ps :: x : s$ en divisant les 2 termes du dernier raport par le facteur commun p. —

Cor. 2e.

50. Dans l'équation $px = yy$, la grandeur p étant constante (28), si x augmente, yy augmentera. donc la parabole s'écarte de plus en plus de son axe à mesure qu'elle s'éloigne de son sommet, et elle peut s'en écarter à l'infini, car il n'y a rien dans l'équation qui empeche x de croitre à l'infini. Donc la parabole n'est pas une courbe rentrante ou qui retourne sur elle même.

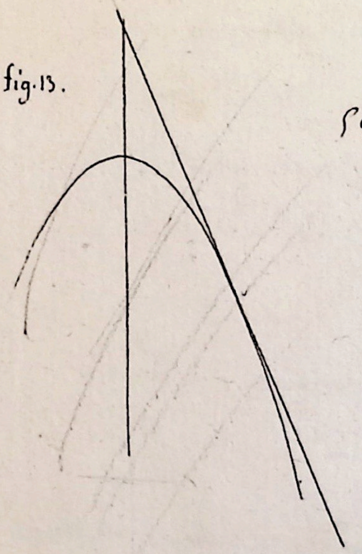
Cor. 3e. fig. 12.



51. donc toutte paralelle comme lm à l'axe ap ne rencontre la parabole qu'en un seul point et entre dans l'espace parabolique, puisqu'elle demeure partout à egale distance de l'axe et

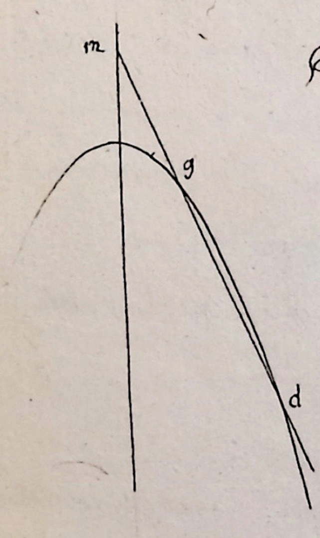
la parabole s'en eloigne.

fig. 13.



Corol. 4e. fig. 13e.

52 Si une droite dg coupe la parabole en 2 points, elle est determinée à rencontrer l'axe: car si elle étoit paralelle à l'axe elle ne pouvoit couper la parabole qu'en un point. (§ 1): ce qui est contre l'hypotése.



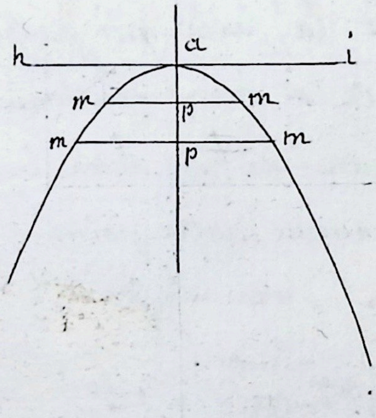
Cor. 5e.

53. Une tangeante à la parabole est determinée à rencontrer l'axe. car ou elle est determinée a rencontrer l'axe, ou elle luy est paralelle. or si elle luy étoit paralelle elle entreroit dans l'espace parabolique (§ 1), ce qui est absurde, puis qu'on la suppose tangeante.

Cor. 6e. fig. 11e.

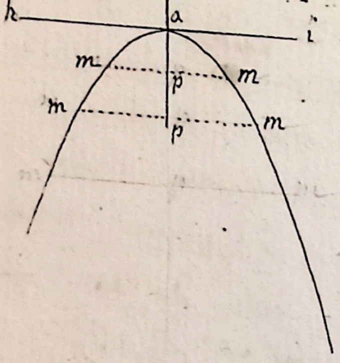
54 puisque les quarrés de chaque pm = y prise de part et d'autre de l'axe ap, sont egaux chacun au rectangle Lx, (48), il

faut que les points M et M soient egalement éloignés du point P; donc l'axe coupe ces doubles ordonnées en 2 egalement. donc il divise aussy la parabole en 2 parties égales qui sont symmètriquement placées de part et d'autre de l'axe. —



Corol. 7e. fig. 14e.

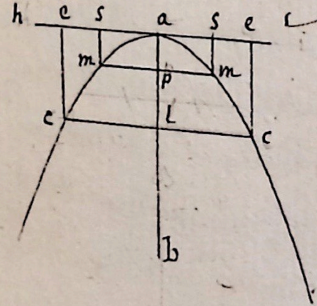
55. Une paralelle hi aux doubles ordonnées étant menée par l'origine a de l'axe est tangeante en ce point. car dans l'équation $px = yy$ à cause de p constante, si $ap = x$ diminue yy diminuera. donc si x devient nul ou zero, chaque PM prise de part et d'autre de l'axe sera nulle, c'est-à-dire, si le point P tombe en a, les points M et M de part et d'autre de l'axe se réuniront aussy en a, donc la parallele hi n'aura que le seul point a commun avec la parabole: donc elle sera tangeante en a. donc &c. —



Corol. 8.e fig. 14.e

56. Il est évident, (55), que la ligne hai parallelle aux ordonnées, est la seule qui puisse être tangente à la parabole au sommet a; parcequelle est la seule qui passant par le point a et étant continuée de part et d'autre ne rencontre la parabole en aucun autre point et n'entre point dans l'espace parabolique.

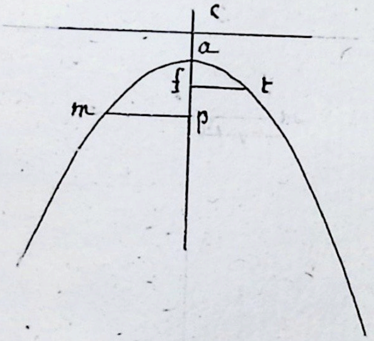
Corol. 9.e fig. 14.e



57. Si l'on prend as ou ae menée par le sommet a parallelle aux ordonnées pm, pr. l'axe de la parabole, ae, ou ms pr. l'ordonnée, on aura ms = as². car soit as = pm = x. ms = ap = y, et soit p le paramètre, on a, (48), py = xx. donc &c.

58. Remarques. cette proposition fait voir quil est indiférent

de prendre celuy qu'on voudra des 2 axes conjugués p.r l'absisse et l'autre p.r l'ordonnée ce qui convient a toutes les courbes géometriques ou les 2 indéterminées x et y forment toujours un parallelograme que l'on nomme parallelograme des Coordonnées. —

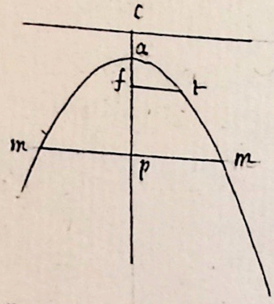


Cor. 10.e fig. 15.e

59. Si dans l'équation $4ax = yy$, l'on fait $x = a$, le point p tombera en f, et on aura: $4aa = yy$. donc $2a = y$ [illegible]. c'est-a-dire que l'ordonnée fp qui part du foyer est égale a la moitié du paramètre, par conséquent la double ordonnée qui passe par le foyer est égale au — Paramètre. (Il en est de même dans l'Ellipse et dans l'hyperbole. Voyez 137, et 245 n.o 6.

Cor. 11.e fig. 15

60 Le foyer f de la parabole est éloignée du sommet d'une quantité

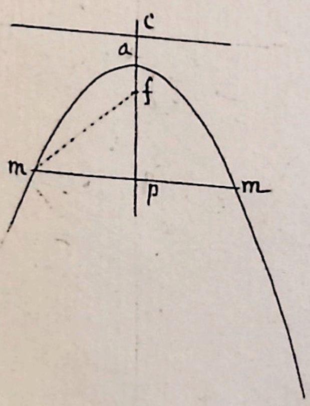


égale au quart du Paramètre. Car $ff = y = \frac{p}{2}$ (59). donc $yy = \frac{pp}{4} = px$. et divisant par p, il vient $\frac{p}{4} = x$ ce qui fait voir que l'absisse $af = x$ est égale au quart du paramètre comme on l'avoit supposé. (47)(*)

* Cette distance est plus grande dans l'Ellipse (136) et plus petite dans l'hyperbole (260).

61 Theo. 2e. fig. 15.

La ligne tirée de l'extrémité d'une ordonnée au foyer est égale à l'absisse correspondante plus au quart du Paramètre, c'est-à-dire, $mf = ap + af = x + \frac{p}{4}$



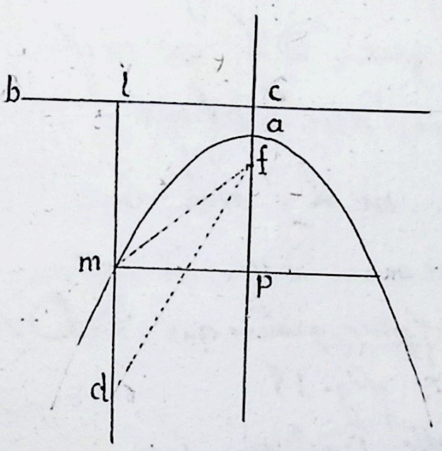
Démonstration.

$af = \frac{1}{4}p$. (60). Soit $af = a$. ainsy $p = 4a$. donc $yy = 4ax$. $fp = x - a$. Soit $mf = z$. Le Δ rectangle mpf donne $zz = yy + xx - 2ax + aa$. or au lieu de yy mettant sa valeur $4ax$, l'on aura $zz = 4ax + xx - 2ax + aa$. et par réduction $zz = xx + 2ax + aa$. et par extraction de racine: $z = x + a = x + \frac{1}{4}p$.

donc &c.

Théo. 3e.

62 Sur l'axe ap prolongé au dessus du sommet a, prenez ac = af distance du foyer, et par c menez cB paralelle aux ordonnées Mp.



1°. Si d'un point M pris sur la parabole on mene Mf au foyer et ML paralelle a l'axe jusqu'à la ligne cB, ces 2 lignes seront egales.

Démonstration.

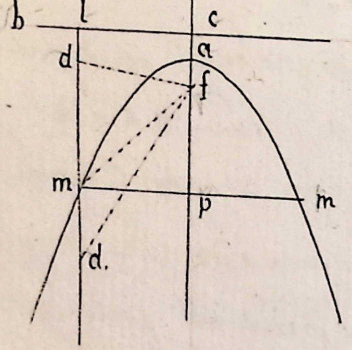
$Mf = ap + ac$ (61) $= pc = mL$, donc &c.

il en sera ainsy de touts les autres points de la parable.

2°. Si d'un point qualconque D pris au dedans de la parabole on tire Df et une autre DL paralelle à l'axe, Df sera plus petit que DL et DL coupera la parabole en M

Démonstration.

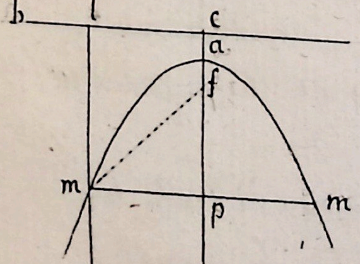
Soit tirée Mf. Df est moindre



que dm + mf. or DL = dm + mf.
donc &c — —

3°. Si on prend le point d hors de la parabole df sera plus grande que DL. car mf = ml. donc dm + Df est ~~moindre~~ plus grand que mL: otez la partie commune Dm, il restera ~~df del~~ Df plus grande que DL.

Cor. fig. 15



60. La paralelle CB que l'on peut prolonger indefiniment de chaque coté de l'axe est apellée directrice parcequelle dirige en vertu de sa proprieté dans la const. de la parabole, comme on l'a vû (45). —

1°. La directrice est distante du foyer d'une quantité egale a la moitié du parametre. car on a fait $ac = af = \frac{1}{4}p$. donc $fc = fa + ac = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p$

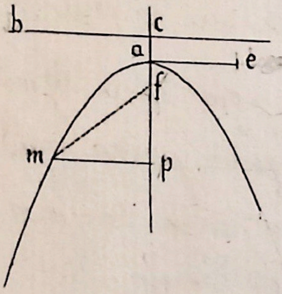
$= \frac{2}{4} p = \frac{1}{2} p$. comme on la supposé (44). —

2°. chaque point du périmètre de la parabole est autant éloigné de la directrice que du foyer f. Car en quelque point de la ligne parabolique qu'on puisse prendre le point M, on aura toujours ML = Mf. (62.) donc &c.

64 Il est évident que la quantité constante qui accompagne l'inconnue ou l'indeterminée qui n'a qu'une dimention dans un des membres de l'équation est l'expression ~~de l'axe~~ du parametre de l'axe de la parabole quand le quarré de l'autre indeterminée est seule dans l'autre membre. V. g. dans cette equation $\frac{aax}{2} = yy$. $\frac{aa}{2}$ est l'expression

du parametre de Lax e de la parabole dont l'absisse est x et l'apliquée y.

Prob. 2e. fig. 15



65. Une Equation à la parabole $bx = yy$ étant donnée décrire la parabole; lorsque les coordonnées sont perpend. l'une a l'autre.

Solution.

b etant (62) le parametre, x l'absisse, et y l'appliquée de la parabole qu'il faut décrire. Soit a le commencement de x qui va vers p, et de y qui va vers e ayant pris $ae = b$, et prolongé ap du coté de a, faittes af et ac chacune egale a ~~un~~ $\frac{1}{4} b = \frac{1}{4} ae$: et décrivés une parabole par le 1er probleme. Le point a en sera le sommet, f le foyer et c le point generateur.

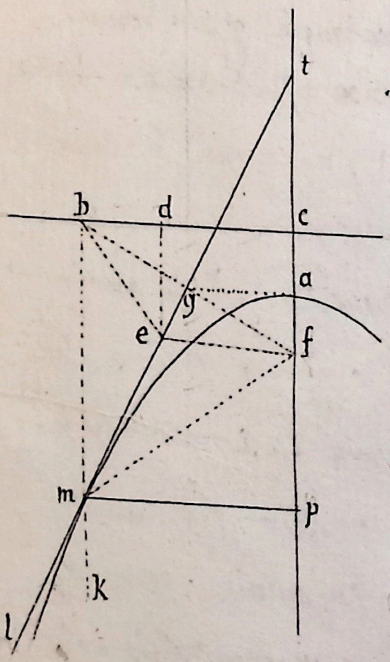
Démonstration.

Soit menée une ordonnée quelconque pm. af étant égal à $\frac{1}{4}B$, $ap = x$, $pm = y$, fp sera $x - \frac{1}{4}B$, ou $\frac{1}{4}B - x$. $fm = pc$ (62) $= x + \frac{1}{4}B$. or le Δ rectangle fpm donne $xx + \frac{1}{2}Bx + \frac{1}{16}BB = xx - \frac{1}{2}Bx + \frac{1}{16}BB + yy$, ce qui se réduit à $Bx = yy$.

66. Remarque. Si on avoit fait (48) $cp = x$, $cf = a$, l'on auroit trouvé $2ax - aa = yy$. et si on avoit fait $fp = x$, et $cf = a$, l'on auroit trouvée $2ax + aa = yy$. ce qui fait voir que quand une équation à la parabole contient plus de 2 termes, l'origine des inconnues n'est point au sommet de l'axe.

Prob. 8e. fig. 16

67. Le sommet, le foyer et la directrice étant donnée, par un point M donné sur la parabole mener une tangeante à cette courbe.



Solution

Du point donné M soit menée au foyer f une droite Mf et sur la directrice une perpend. Mb. Soit tirée la droite bf et si par le milieu g de cette ligne et le point M, on fait passer une droite mt, elle sera la tangeante demandée.

Démonstration

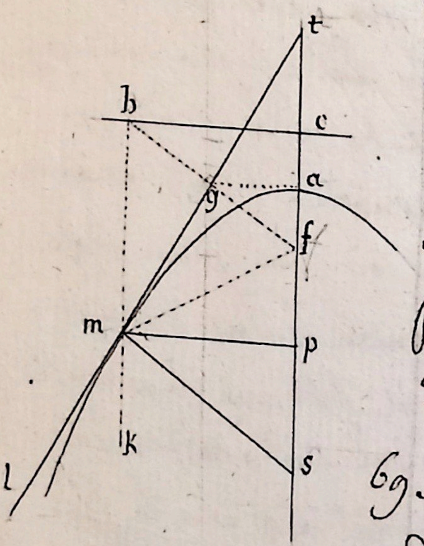
D'un point quelconque e de mg différent de M, soient menées les droites ef, eb, ed dont la derniere soit perpend. à la directrice cD. La droite mg est (const) perpend. sur le milieu de bf. (39 géom.) puisque mf = mb.

(62). et que Dg = Gf. donc cette droite passe par touts les point egalement éloignés de f et de B. donc Ef = EB. mais ED est plus petit que Eb. donc aussy ED est plus petit que Ef. donc le point E nest pas a la parabole. (62). or comme on fera voir la meme chose p^r. tout autre point different de M, il suit que le point M est le seul qui apartienne a la droite Lg et a la courbe: donc Lg est tangeante au point M.

68. Une tangeante en un point quelconque de la parabole rencontre nécessairement Laxe en quelque point T (53). or si du point de contacte, on mene une ordonnée Mp a Laxe, la partie de laxe qui est comprise

entre l'ordonnée et le point T où la tangeante rencontre l'axe s'appelle Soustangeante.

Si au point de contacte, on élève une perpend. MS, elle coupera l'axe en quelque point S. La partie de l'axe ps compriise entre l'ordonnée et la perpend, s'appelle Sousperpend, ou sous normale.



Cor. 1er.

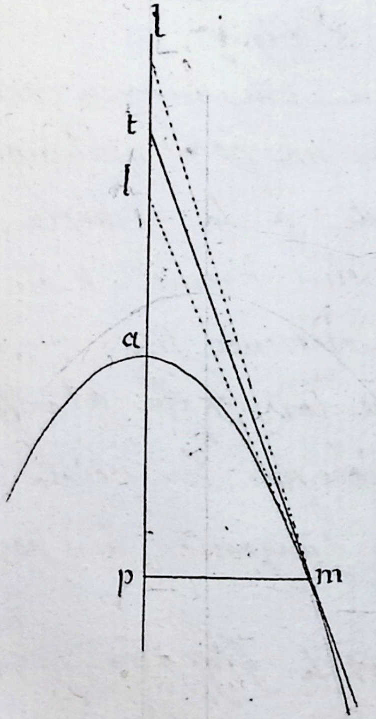
69\. La Soustangeante pt, est double de l'abscisse ap, ou at = ap.

Demonst.

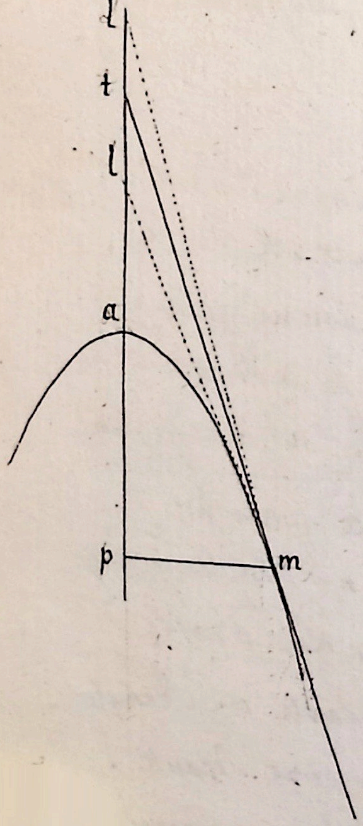
Par la const. de la tangeante, l'angle gmf = gmb. mais gmb = ftm a cause des paralleles ft, mb. donc le Δ fmt est isocelle. donc ft = fm. mais mf = mb (62) et mb = cp a cause du rectangle cp mb. donc ft = pc. or si de ces

lignes égales, on ôte les lignes égales ac, af, on aura at = ap. donc pt = 2ap. donc en ~~nommant~~ supposant toujours ap = x, l'expression de la soustangeante sera 2x.

Cor. 2. fig. 17.



70. Reciproquement si d'un point quelconque M de la parabole on mene une ordonnée mp a l'axe et que l'on fasse at = ap, la ~~lig~~ droite tirée par les points t, m, sera tangeante en M. car la droite mt est tangeante ou secante, or elle ne peut etre secante. car si elle l'etoit, on pourroit donc du point M mener une tangeante Ml qui rencontreroit l'axe (53) en un point L au dessus ou audessous de T. or ml étant tangeante, la soustangeante Lp seroit double de l'abcisse ap (69)



ainsi on auroit $Lp = 2ap$.
mais $pt = 2ap$ (supp.): donc
$Lp = pt$, c'est-a-dire la partie
egale au tout, ce qui est
absurde. donc Mt n'est
pas secante donc elle est
tangeante.

Cor. 3.e fig. 17.

71. on a donc un moyen facile
de mener par un point quelconque
une tangeante a la parabole.
car si du point donné M, on
mene une ordonnée Mp a
l'axe et que l'on fasse $at = ap$,
la ligne tirée par les points
M, t, sera tangeante au point
M. (70).

Cor. 4 fig. 16.

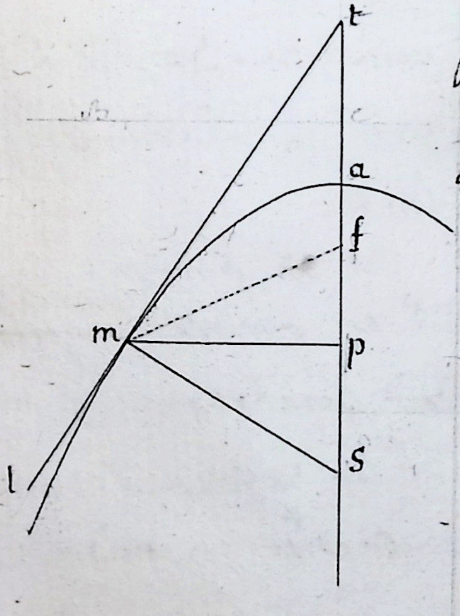
72. La sous perpend. $ps = \frac{1}{2}p$,
c'est-a-dire, est égale à la
moitié du paramètre. car $pm = y$.
$ap = x$. $pt = 2x$. (69). or
le Δ rectangle tms. donne

$2x : y :: y : \frac{yy}{2x} = ps$. mais yy

$= px$. (48). donc $ps = \frac{px}{2x}$

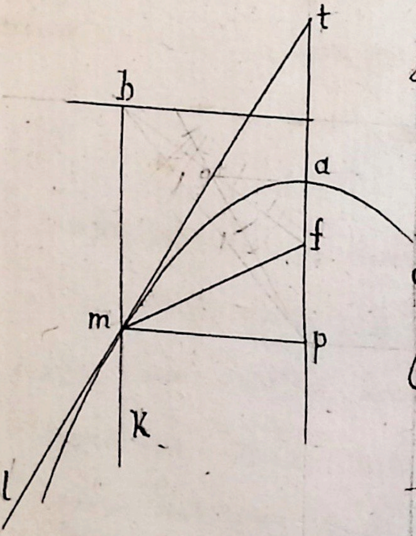
$= \frac{1}{2}p$. donc &c.

D'où il suit que dans la parabole la sousperpend. est une grandeur constante.



Cor. 8e. fig. 16

73. connoissant la soustangeante pt et la sous perpend. ps, il est facile d'avoir l'expression analytique de la tangeante MT et de la perpend MS que l'on apelle aussy la normale. A cause du Δ rectangle Mpt, on trouvera $mT = \sqrt{px + 4xx}$. de mesme a cause du Δ rectangle mps on aura $MS = \sqrt{px + \frac{1}{4}pp}$, ou $\sqrt{x + \frac{1}{4}p \times p}$, ou $\sqrt{4x + p \times \frac{1}{4}p}$. donc $mt : ms :: \sqrt{px + 4xx} : \sqrt{p + 4x \times \frac{1}{4}p} :: \sqrt{x} : \frac{1}{2}\sqrt{p}$,



en divisant chaque terme du dernier rapart par $\sqrt{p+4x}$.

Cor 6e. fig. 16

74 Si on prolonge la droite MB au dedans de la parabole vers K, les angles formés d'un même coté de la tangeante avec cette ligne par les droites MK, Mf sont egaux. car tmb = tmf (cons) - mais tmB = lMK qui luy est opposé par le sommet donc tmf = lmk. ——

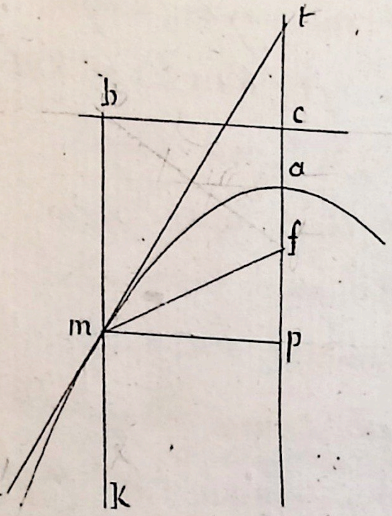
Cor. ~~8~~. f

75. donc si on oppose a un corps lumineux ~~au soleil~~ un miroir parabolique de telle sorte que les rayons tombent sur la concavité du miroir parallellement a l'axe, tous les rayons se réflechiront au point f. car le principe de la catoptrique est que l'angle de réflexion est toujours

egal a l'angle d'incidence,
supposant donc que
Km est un rayon, l'angle
d'incidence est Kml. or Kml
= Lmf. (74). donc l'angle
Lmf est l'angle de réflexion.
c'est-a-dire que le rayon Km
se réfléchire selon la ligne
mf. mais comme l'angle Kml
= toujours l'angle Lmf en quelque
point que ce soit de la parabole
il s'en suit que touts les rayons
paralleles a l'axe se réfléchiront
au point f.

Cor. 8. fig. 16.e

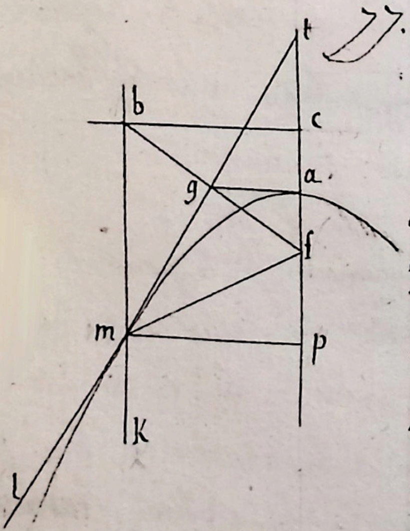
76. reciproquement si le point f
est un point lumineux touts les
rayons partis de ce point et
réflechis a la rencontre de
la parabole se seront suivant
les direction paralleles
a l'axe. car supposés fm



un rayon, l'angle d'incidence est fmt. or fmt = kml. (84). donc l'angle kml sera l'angle de réflexion. c'est a dire que le rayon fm, se réfléchira selon la ligne mk qui est parallelle a l'axe, (const). donc &c.

C'est a cause de ce(tte) propriété que le point f est apellé foyer.

Cor. 3e. fig. 16e.



77. La tangeante ag au sommet a rencontre la tangeante mt au meme point g que la droite fg. car fm = ft (69). donc fg coupe ft par le milieu (46 geom) or parceque ag, pm sont paralleles, at : ap :: fg : gm. mais at = ap. (69). donc fg = gm. donc ag coupe mt aussy par le milieu,

et par conséquent du v.-y. ci-après pag. 59.

2.e axe ~~……~~, ou l'axe conjugué au 1er.

Une droite Mp ou Mo menée d'un point M de la courbe perpendt a un des axes, est une <u>ordonnée</u>, ou <u>appliquée</u> au même axe. Les portions Ap, Bp, ou Do, Eo d'un axe formé par la rencontre de cet axe et de son ordonnée quelconque sont les <u>abscisses</u>, ou les <u>coupées</u> du même axe. Une ordonnée et ses abscisses correspondantes se nomment en géneral <u>coordonnées</u>.

Les points fg également éloignés du centre C ou ses extremités AB sont nommés <u>foyers</u>. Une 3e proportionelle aux 2 axes, s'apelle <u>parametre</u> de celuy qui est le 1er terme de la proportion

117. Nous ferons dans la suite le grand axe AB = 2a. le 2e DE = 2b. la Distance fg des foyers = 2c. Le parametre du 1er axe = p. et celuy

du 2.d = [stain] indeterminée cp = x, pm = y. D'où il suit que les abscisses ap; Bp seront l'une a−x, et l'autre a+x, quand le point p tombera dans la partie ca : au contraire ap sera ~~ap~~ a+x, et Bp = a−x, quand le point B tombera sur la partie cp. Dans cette (Supposit.) le centre C sera l'origine des x ou des abscisses. Si l'on regarde comme positives les Cp, ou les x qui vont de C vers a, ceux qui iront vers l'extremité opposée B seront les x negatives.

Il faut encore remarquer que dans cette même Suppositions, les ordonnées pm au grand axe sont égales aux abscisses co du petit axe, et de même les abscisses cp du grand axe sont egales aux ordonnées mo au petit, et réciproquement.

Quelques fois aussy on supposera l'origine des x en a, ou en b à l'un des sommets de la courbe : dans ce cas l'une des abscisses ap étant x, l'autre abscisse bp sera $2a-x$. En général tout point fixe sur le plan d'une courbe peut être pris pr. l'origine des coordonnées; mais il est naturel de la fixer au centre, ou à l'un des sommets de la courbe, parce que ces points sont les plus remarquables et qu'ils donnent plus de facilité dans les calculs. —

118. Quand les 2 axes conjugués ab DE sont donnés, pr. <u>determiner les foyers</u>, f, g. de l'extremité D, ou E du petit axe, comme centre, avec le rayon ac. — décrivez un cercle qui coupera ab en 2 points fg qui seront les foyers. Car (cons) $gE+fE=ab$.

donc sont g étant les foyers. (118).

118. Le grand axe AB, et les foyers f, g étant donnés pr. déterminer l'axe conjugué à l'axe AB; du foyer f, comme centre, avec le demi axe AC décrivez un cercle: il coupera la perpend. à l'axe AB menée par le centre C en 2 points D, E. La droite DE sera l'axe conjugué à l'axe AB. La démonstrat. de l'article precedent. —

120. Le parametre du 1r. axe se détermine en faisant cette analogie. $2a : 2b :: 2b : \frac{4bb}{2a} = \frac{2bb}{a}$ $= p$. Celuy du 2d. axe par cette cy. $2b : 2a :: 2a : \frac{4aa}{2b} = \frac{2aa}{b}$ $= \pi$. D'où il suit que les paramètres du demi-grand axe et du demi-petit axe seront $\frac{bb}{a}$ et $\frac{aa}{b}$, et que $\frac{1}{2} ap = bb$. $\frac{1}{2} b\pi = aa$.

121 Il suit encore que le rectangle de l'axe AB par son parametre est égal au quarré de l'axe conjugué DE et que le rectangle du d. axe DE par son paramètre est egal au quarré de l'axe conjugué ab.

Théor. V. fig. 29.

122. Le ½ petit axe est moyen proport. entre les distances ag, Bg d'un foyer g aux extremités du grand axe.

Démonstration.

Puisque lon a cg ou cf = c. ca = a. Bg sera a+c, et ag sera a−c. il faut donc démontrer que a+c : b :: b : a−c, ou que bb = aa−cc. cE est (cons) perpend. au milieu de gf, donc les droites gE, fE tirées de l'extremité du petit axe au foyer sont égales entre-elles et à la ½ du grand-axe ab: donc gE = a. or le Δ rectangle cgE donne $\overline{cE}^2 = \overline{gE}^2 - \overline{cg}^2$: c'est-à-dire, bb = aa−cc

donc $a-c : B :: B : a+c$.

Théo. 2e.

120 Le $\overline{pm}^2$ d'une ordonnée quelconque pm au grand axe est au rectangle $ap \times bp$ de ses abscisses, comme $\overline{ce}^2$ du ½ petit axe est au $\overline{ac}^2$ du ½ grand axe.

Demonstration.

Du point M soient menées aux foyers f, g les droites Mg, fM et de ce point comme centre avec Mg soit décrite une portion de cercle qui coupe l'axe en 2 points g, l et la droite Mf, en 2 points K, L. par la formation de l'élipse, on a $fm+gm=2a$ donc aussy $mf+fl$ ou $hL=2a$. Donc si on divise cette ligne en 2 également en h, on aura fh ou $hL=a$. d'où il suit que $fK=2hm$. Car $fK=fL$ ou $2hL-2mL$, au lieu que

Autre démonstration.

Du point m soient menées aux foyers f, g les droites mg, fm. Dans le triangle fmg, on a (638 géom) $fm+gm : fg :: fp-gp : fm-gm$, ou $2a : 2c :: c+x-c+x$, ou $2x : \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$. Donc $gm = a-\frac{cx}{a}$, ou $\frac{a^2-cx}{a}$ (245 calcul).

Or $\overline{pm}^2 = \overline{gm}^2 - \overline{gp}^2$, ou $yy = \frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2} - c^2+2cx-xx$:

Mais à cause du Δ rectangle fce, on a $\overline{cf}^2 = \overline{fe}^2 - \overline{ce}^2$, ou $cc = aa-bb$, donc on a par substitution, $yy = \frac{a^4-2a^2cx+a^2x^2-b^2x^2}{a^2} - a^2+b^2+2cx-xx$, ou $= \frac{a^4-2a^2cx+a^2x^2-b^2x^2-a^4-a^2b^2+2a^2cx-a^2x^2}{a^2}$.

et par réduction $yy = \frac{a^2b^2-b^2x^2}{aa}$; d'où l'on tire $yy : aa-xx :: bb : aa$. Donc &c.

$hm = hl - ml$. on fera voir demême que $fs = 2cp = 2x$, car $fs = fg - gs = 2cg - 2gp$, et $cp = cg - gp$. cela posé; a cause des secantes fl, fg exterieures au cercle, on a, $fl : fs :: fg : fk$; ou $2a : 2x :: 2c : fk$, ou $2hm = \frac{2cx}{a}$. et divisant tout par 2, il vient $a : x :: c : \frac{cx}{a}$: si on prend en même temps la somme et la difference des consequens et des antécedens, on aura ces 2 propotions :

$$a : x :: a + c : x + \frac{cx}{a}$$

$$a : x :: a - c : x - \frac{cx}{a}$$

faisant encore s[ur] chacune un Componendo, ensuite un Dividendo, on aura

$$a : a + x :: a + c : a + c + x + \frac{cx}{a} = fm + fp.$$

$$a : a - x :: a - c : a - c - x - \frac{cx}{a} = fm - fp.$$

car $fm = fh = a + hm = \frac{cx}{a}$. Et
$fp = cg + cp = c + x$. donc
en multipliant par ordre ces 2 proportions,
on aura, ~~xx~~

$aa : aa - xx :: aa - cc : fm + fp \times fm - fp$
$= \overline{fm}^2 - \overline{fm}^2 = \overline{pm}^2$, à cause
du △ rectangle fmp.
donc au lieu de $aa - cc$ mettant
bb qui leur est egal (122),
et yy p.r pm, et faisant alternando,
et invertendo, on aura $yy : aa - xx$
$:: bb : aa$. donc &c.

Cor. 1.r fig. 30.

124. Donc les quarrés des ordonnées au
1.r axe sont entre eux comme les
produits des abscisses correspondantes
car la raison des yy à $aa - xx$
est toujours egale a la raison
constante de bb à aa. c'est-à-dire
que si pm et is sont 2 ordonnées
quelconques, on aura $\overline{pm}^2 : \overline{is}^2 :: am \times bm$
$: ai \times bi$.

Cor. 2. fig. ~~30~~.

125 Le quarré d'une ordonnée quelconque au grand axe est plus petit que le rectangle des absisses correspondantes car $yy : aa - xx :: bb : aa$. or bb est $< aa$, donc yy est $< aa - xx$; ce qui donne une difference entre l'elipse et le cercle, puisque dans le cercle le quarré d'une ordonnée est egale au rectangle des absisses. (334 géo)

Cor. 3.

126 De la proportion $yy : aa - xx :: bb : aa$, on en déduit $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, ou $yy = \frac{\overline{aa - xx} \times bb}{aa}$, ou ~~$xx$~~ $aa - xx = \frac{aa\,yy}{bb}$. équations qui expriment d'une manière générale les propriétés des coordonnées raportées au grand-axe, en supposant, comme on le fait icy, que

Lorigine des x est au centre C.

Cor. 4.°

127. Si dans l'équation $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ on suppose $y=0$, l'on aura $xx = aa$ donc $x = \pm a$. ce qui fait voir que l'Ellipse passe par les points $A B$, Donc l'Ellipse est une courbe, rentrante ou qui retourne sur elle meme. Si $x = 0$, on aura $yy = bb$ donc $y = \pm b$. ce qui montre que l'Ellipse passe aussy par les points C, E en faisant $CD = cb$

Cor. 5.

128. Les ordonnées au grand axe diminuent à mesure qu'elles s'éloignent du centre; car dans l'equation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$; si x augmente, xx augmentera. ainsy le membre $aa - xx$ — diminuera, puisquon ôtera du quarré aa une plus grande quantité xx, or le membre $aa - xx$

diminuant, l'autre $\frac{aayy}{AcB}$ diminuera aussy.
mais il ne peut diminuer par les
grandeurs $\frac{aa}{AcB}$ qui sont constantes.
donc il diminuera par yy, donc
les abscisses croissantes, les ordonnées
diminuent.

Cor. 6.

129 Il suit 1° que la $\frac{1}{2}$ du petit axe est
la plus grande ordonnée à l'axe
principal et les extremités DE
determinent la plus grande
largeur de l'ellipse.

2° comme x ne peut croitre
que jusqu'à ce qu'elle devienne $=ca=a$.
et que dans ce cas $aa-xx=aa-aa=0$.
dès lors $y=0$: ce qui fait voir que
les points N, S se confondent alors
avec les points A, B et que l'ellipse
coupe l'axe en ces points,
comme on l'a deja remarqué (127)

Cor. 7.e Fig. 30.

130 Une perpendiculaire Dg a l'extremité du petit axe est tangeante en ce point; car Dg étant parallelle (cons) au grand axe AB, si elle rencontroit l'Ellipse en un autre point n, on auroit ni = dc. ainsy les ordonnées ne diminueroient pas à mesure qu'elles s'éloignent du centre, ce qui est absurde (128). donc Dg ne peut toucher l'Ellipse qu'au seul point D. donc &c.

Cor. 8.e fig. 31

131 Les abscisses CM, Cf étant égales, les ordonnées correspondantes fm, fh sont aussy égales. car en conservant les denominations precedentes, soit $Cf = s$, $fh = z$. L'equation $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ donne $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$, et $ss = \frac{aabb - aazz}{bb}$. or par (supp.) $Cf = CM$, ou $x = s$.

donc $xx = ss$. donc $\frac{aabb - aayy}{bb}$

$= \frac{aabb - aazz}{bb}$. or multipliant

par bb, ôtant $aabb$ de part et

d'autre, et divisant par aa,

on trouvera $yy = zz$, ou $y = z$,

c'est-à-dire, $fm = fh$.

C. Q. F. D.

132 Réciproquement les ordonnées

fm, fh étant égales, les abscisses

cm, cf, sont aussy égales.

Car l'équation ~~$aa\ xx$~~ $yy = bb$

$-\frac{bbxx}{aa}$ donne $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$

et $zz = \frac{aabb - bbss}{aa}$. mais

$y = z$ (supp). donc $yy = zz$ donc

$\frac{aabb - bbxx}{aa} = \frac{aabb - bbss}{aa}$.

or x^{ant} par aa, ôtant $aabb$

de part et d'autre, et divisant

par bb, on aura $ss = xx$ ou $s = x$,

c'est-à-dire, $cf = cm$. donc le

Cor. 10

133, Les ordonnées égalem.t eloignées du centre étant égales, il s'en suit que l'ellipse n'est pas plus grosse ou plus évasée vers l'une de ses extremités que vers l'autre.

Cor. 11

134. De la proportion qui donne le parametre $2a : 2b :: 2b : p$. on tire $4aa : 4bb :: 2a : p$. ou $aa : bb :: 2a : p$. donc si dans l'équation $yy = \overline{aa - xx} \times \frac{bb}{aa}$, on met le rapport $\frac{p}{2a}$ au lieu du rapport $\frac{bb}{aa}$ qui luy est egal, on aura l'équation $yy = \overline{aa - xx} \times \frac{p}{2a}$ ou $yy = \frac{1}{2}ap - \frac{pxx}{2a}$: on apelle cette equation, l'équation au parametre ; elle peut servir à trouver par le calcul tout les points de l'elipse, demême que l'équation

à l'axe. —

Cor. 12e.

135 L'équation au parametre $yy = aa - xx \times \frac{p}{2a}$ donne cette position : — $yy : aa - xx :: p : 2a$; ce qui fait voir que le quarré d'une ordonnée quelconque au grand axe, est au rectangle de ses abcisses comme le parametre de cet axe est au meme axe. —

Cor. 13e.

136 La distance ag du foyer au sommet de la courbe le plus proche est plus grande que le $\frac{1}{4}$ du parametre de l'axe AB. —

Nota. Elle est plus petite dans l'hyperbole (voyez 260), et égale dans la parabole (60)

Demons.

$ag = ac - cg = a - c$. $p = \frac{2bb}{2a}$. (120). ainsi $\frac{p}{4} = \frac{2bb}{4a} = \frac{bb}{2a}$.

cela posé : $a - c : \frac{bb}{2a} :: 2aa - 2ac : bb$.

or $bb = aa - cc$. (122) donc $a - c : \frac{bb}{2a} :: 2aa - 2ac : aa - cc$. divisant le dernier raport par $a - c$, on

aura $a-c : \frac{bb}{2a} :: 2a : a+c$. —

mais $2a = ab$. $a+c = bg$. donc ag $: \frac{p}{4} :: ab : bg$. or ab est $> bg$. donc ag est $> \frac{p}{4}$. —

Cor. 14.e

137. L'appliquée fm au foyer est égale à la moitié du parametre de l'axe ab. —

Demonstration

$bf = bc - cf = a-c$. $af = a+c$

Donc $af \times bf =$ ~~...~~ $a+c \times a-c$ $= aa-cc = bb$ (128) or $\overline{fm}^2 : af \times bf :: \overline{cE}^2 : \overline{ac}^2$. (123). ou $yy : bb :: bb : aa$. donc $yy = \frac{b^4}{aa}$ —,

ainsy $y = fm = \frac{bb}{a} = \frac{p}{2}$. (120)

Donc &c. - Il en est de même dans la parabole et dans l'hyperbole (59 et 245 n. 6)

Cor. 15.e

138 Donc la double ordonnée qui passe par un foyer est égale au parametre de l'axe. —

Théoreme 3e. fig. 30.

139. Le quarré d'une ordonnée quelconque fL au 2d axe DE est au rectangle $DL \times LE$, ou $\overline{cE}^2 - \overline{cL}^2$ de ses absisses, comme $\overline{ca}^2$ du $\frac{1}{2}$ grand axe est au $\overline{cE}^2$ du $\frac{1}{2}$ petit axe.

Demonstration.

L'ordonnée fL au petit axe étant égale à $cI = x$, et $cL = fI = y$, on a les absisses $EL = b - y$, et $DL = b + y$. Donc $EL \times DL = bb - yy$. or l'equation $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ se réduit a cette proportion:

$xx : bb - yy :: aa : bb$, ou

$\overline{fL}^2 : DL \times LE$, ou $\overline{cE}^2 - \overline{cL}^2 :: \overline{ca}^2 : \overline{cE}^2$.

Donc les quarrés des ordonnées au petit axe sont au produit de leurs absisses, comme le quarré du grand axe est au quarré du 2d.

Cor. 1er.

140. Donc les quarrés des ordonnées

au 2e. axe sont aussi entre eux comme les produits des absisses correspondantes, car la raison du quarré d'une ordonnée quelconque au rectangle de ses absisses est toutant égal à celle des quarrés du $\frac{1}{2}$ grand axe et du $\frac{1}{2}$ petit axe. —

Cor. 2e.

141 Le quarré d'une ordonnée au petit axe est plus grand que le rectangle de ses absisses, car $xx : bb - yy :: aa : bb$: or aa est $> bb$, donc xx est $> bb - yy$. c'est à dire, fL^2 est $>$ que $cL \times Ld$

Cor. 3e.

142. La proportion $xx : bb - yy :: aa : bb$ donne cette équation : $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$, ou cette autre, $xx = aa - \frac{aayy}{bb}$ qui conviennent à tous les points de l'ellipse raportées au 2e. axe.

Cor. 4^e

142 Les absisses y du petit axe augmentant les ordonnées x diminuent. on le prouvera en suivant le raisonnement

de l'article 128, et on se servira de l'équation $BB - yy = \frac{BBxx}{aa}$.
D'où il suit que la $\frac{1}{2}$ du grand axe est la plus grande ordonnée au petit axe, et que les extremités a et B déterminent la plus grande longueur de l'ellipse.

Cor. 5.e

144 Donc une perpend.r AB à l'une ou l'autre extremité du grand axe est tangeante en ce point : on le prouvera comme à l'article 130.

Cor. 6.e

145 De la propition qui donne le parametre $2b : 2B :: 2a : T$, on tire $4BB : 4aa :: 2b : T$, ou $BB : aa :: 2B : T$. ou invertendo $aa : BB :: T : 2B$. or on a pour une ordonnée quelconque fL au 2.d axe, $xx : BB - yy :: aa : BB$. (139) donc on aura aussy $xx : BB - yy :: T : 2B$. c'est-à-dire, le quarré d'une

ordonnée quelconque au petit axe est au produit de ses abscisses, comme le paramètre du petit axe est au petit axe.

Cor. 7e.

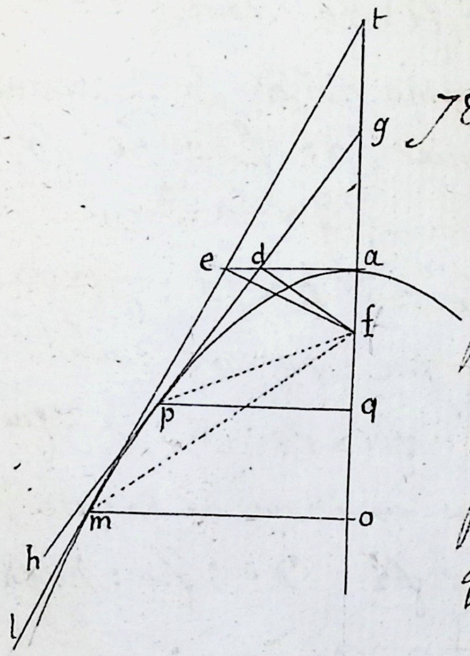
146 La proportion $xx : bb - yy :: t : 2b$ donne cette équation au paramètre p. le 2e. axe : $xx = \frac{1}{2}bt - \frac{t.yy}{2b}$ qui peut servir a décrire la courbe comme les équations précédentes.

Cor. 8e.

147. On voit donc que l'ellipse a les mêmes propriétés, soit que l'on prenne les ordonnées au grand axe ou au petit axe : c'est par cette raison que les 2 axes sont appellés conjugués l'un à l'autre, du Latin Conjugatus, Conjugué ; c'est-à-dire, qui a de l'affinité, ou qui fait de semblables fonctions.

Théo. 4.

et ~~parfois~~ parconsequent
au même point que fg.

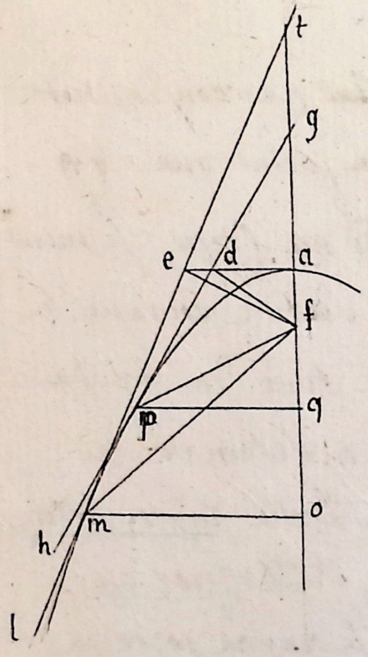


78. Quand un Corps se meut dans une Section cônique, la ligne fm tirée du foyer au point m ou se trouve le mobile s'apelle rayon vecteur, du Latin, vector, porteur. parceque le rayon porte en quelque sorte le mobile.

Theo. 2e. fig. 18.

79 Differentes Tangentes étant menées à differens points de la parabole, si du foyer f on abaisse sur chacune une perpend fe, fd, ces perpend. croissent comme les racines quarées des rayons vecteurs correspondants. —

Le Δ rectangle fet dans le quel on a abaissé de l'angle



droit la perpend. ea, donne $ft : fe :: fe : fa$. donc $\overline{fe}^2 = ft \times fa$. par la meme raison le Δ rectangle fdg donne $fg : fd :: fd : fa$. donc $\overline{fd}^2 = fg \times fa$. donc $\overline{fe}^2 : \overline{fd}^2 :: ft \times fa : fg \times fa$. mais $ft = fm$. $fg = pf$. donc $\overline{fe}^2 : \overline{fd}^2 :: fm \times fa : pf \times fa :: fm : pf$. donc en tirant les racines, on aura $fe : fd :: \sqrt{fm} : \sqrt{pf}$. donc &c.

Théo. 5e. fig 19.

80 Si par un point quelconque T de la parabole, on mene TK parallele a l'axe, Tg tangente, MN parallele a la tangente et inscrite dans la parabole, cette ligne MN est coupée en 2 egalement au point R par la ligne TK.

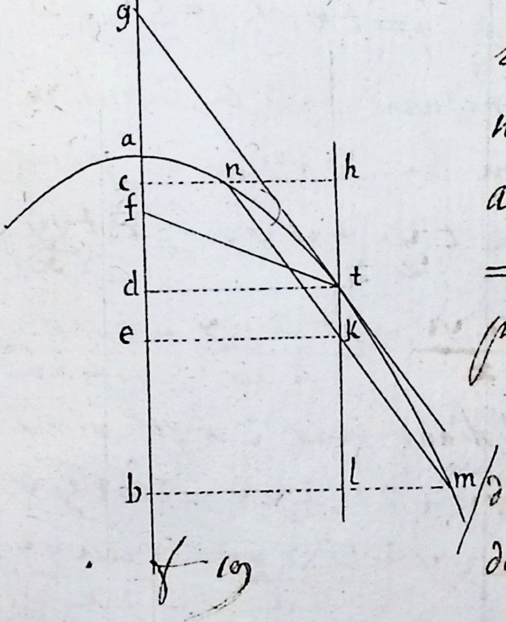
Demonstration. (*)

il y a plusieurs cas. 1r. cas quand l'inscrite MN, ne coupe l'axe

(*) Voyez aussi le corollaire de la 2e demonstration de l'article 86, cy après.

ni au sommet ni au dedans de la parabole.

Par les points n, t, k, m soient tirées sur l'axe les perpend. ch, dt, ek, bm. soit ad = ag = x, et gd = 2x. td = ch = ek = bl = y. ad = s. dc = kh = u, db = kl = t. nh = r. ml = q. ac = s − u. ab = s + t. cn = y − r. bm = y + q. kt = de = s − x. cela posé



ac : ad :: $\overline{cn}^2 : \overline{dt}^2$. (49)

s − u : x :: yy − 2ry + rr : yy

donc syy − uyy = xyy − 2rxy + rrx.

de meme ab : ad :: $\overline{bm}^2 : \overline{dt}^2$.

s + t : x :: yy + 2qy + qq : yy.

donc syy + tyy = xyy + 2qxy + qqx.

or ota une equation de l'autre le 1er membre de la 1ere du 1er membre de la 2e, il reste :

syy + tyy = 2qxy + 2rxy + qqx − rrx. ensuite les Δ

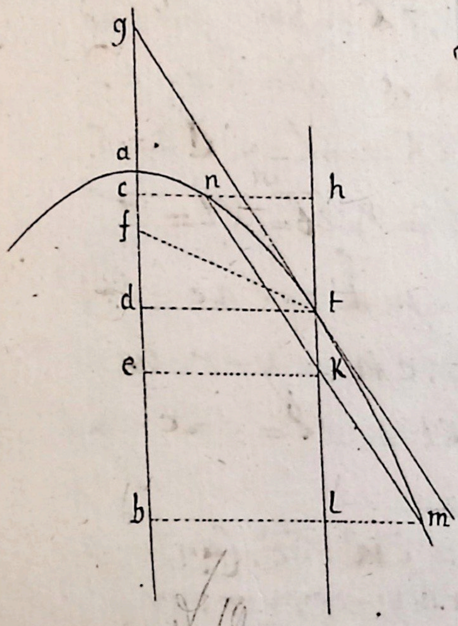


fig. 19

gDt, Khn, Klm sont semblables
donc gD : Dt :: Kh : nh.
$2x : y :: u : r$
donc $2rx = uy$, et $r = \frac{uy}{2x}$.
de plus gD : Dt :: Kl : lm.
$2x : y :: t : q$
donc $2x\,q = ty$, et $q = \frac{ty}{2x}$.
or substituant dans la dernière équation les valeurs de r et q, on aura $tyy + uyy = 2x\frac{tyy}{2x} + \frac{2xuyy}{2x} + \frac{ttxyy}{4xx} - \frac{xuuyy}{4xx}$.
multipliant par 2x, il vient $2txyy + 2uxyy = 2xtyy + 2xuyy + \frac{ttxyy}{2x} - \frac{xuuyy}{2x}$.
par transposition $2txyy + 2uxyy - 2xtyy - 2xuyy + \frac{xuuyy}{2x} = \frac{ttxyy}{2x}$, et
par réduction $\frac{xuuyy}{2x} = \frac{ttxyy}{2x}$, et par division

$\frac{uu\,yy}{2} = \frac{tt\,yy}{2}$. or $tt = uu$

$t = u$. $tl = kh$. donc km

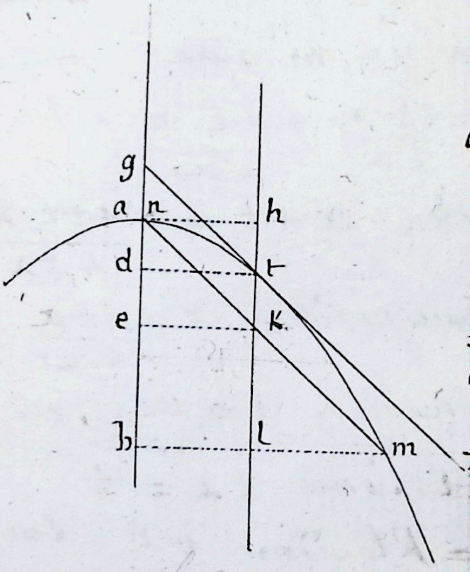
$= kn$. donc &c. —

2°. cas. lorsque la paralelle

mn coupe l'axe au sommet

a et que les points m et n

concourent. —



f 20

Soient $aD = ag = tk = Dl =$

$= x$. $gD = al = kh = 2x$.

$Dt = ah = lk = hl = y$. kl

$= lb = t$. $lm = q$. $ab = 2x$

$+ t$. $bm = y + q$. cela posé,

$aD : ab :: \overline{Dt}^2 : \overline{bm}^2$ (49).

$x : 2x+t :: yy : yy+2qy+qq$.

donc $2xyy + tyy = xyy + 2qxy$

$+ qqx$, et faisant évanouir

xyy, il reste : —

$xyy + tyy = 2qxy + qqx$.

les Δ semblables gDt, klm

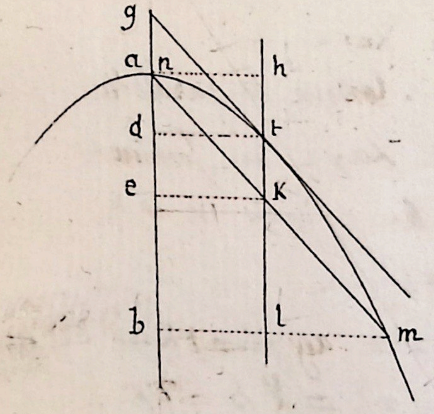
donnent $gD : Dt :: kl : lm$.

$2x : y :: t : q$. donc $2xq = ty$.

et $q = \frac{ty}{2x}$. or substituant cette

valeur de q dans la derniere
Equation, il viendra

$$xyy+tyy=\frac{2txyy}{2x}+\frac{ttxyy}{4xx}$$



divisant par yy, on aura

$$x+t=\frac{2tx}{2x}+\frac{ttx}{4xx} \text{ et}$$

par reduction $x+t=t+\frac{ttx}{4xx}$

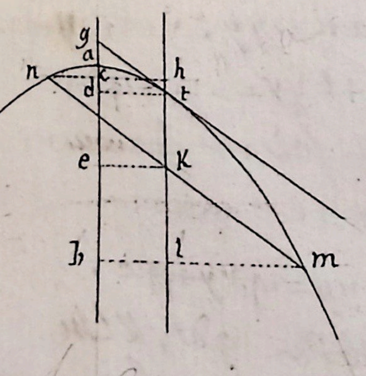
et par transposition $x=\frac{ttx}{4xx}$

et par reduction $1=\frac{tt}{4xx}$, ou

$4xx=tt$. donc $2x=t$

ou $kh=kl$. donc $nk=km$.

3°. cas. quand mn coupe l'axe ab audessous du sommet. toutes les lignes ont la meme valeur que dans le 1.er cas, excepté cM qui etoit $y-r$ et qui est icy $r-y$, nb-cb. mais comme les quarrés de $y-r$ et de $r-y$ sont les memes, on aura la meme conclusion donc &c.



f. 21

Cor

81 Comme ces 3 cas renferment toutes les positions que l'on peut donner a

la corde MN, il suit que toutes les cordes paralelles a une tangeante quelconque sont toujours coupées en egalt. par une droite tL paralellt. a l'axe par le point de contacte.

82 La ligne tL paralelle a l'axe AB s'apelle diamètre, parcequelle coupe toutes les cordes MN par leur milieu. L'origine du diamètre est le point T, ou il coupe la Parabole.

Toute droite NK ou MK terminée a la courbe et au diamètre, et paralelle a la tangeante en T, est une ordonnée au diametre.

La corde MN est une double ordonnée.

Les abcisses, ou Coupées, sont les parties TK du diametre, comprises entre l'origine du diametre et la rencontre de

L'ordonnée —

83 Il suit 1°. que dans la parabole toutte ligne parallelle a l'axe est un diametre ainsy il peut y en avoir une infinité.

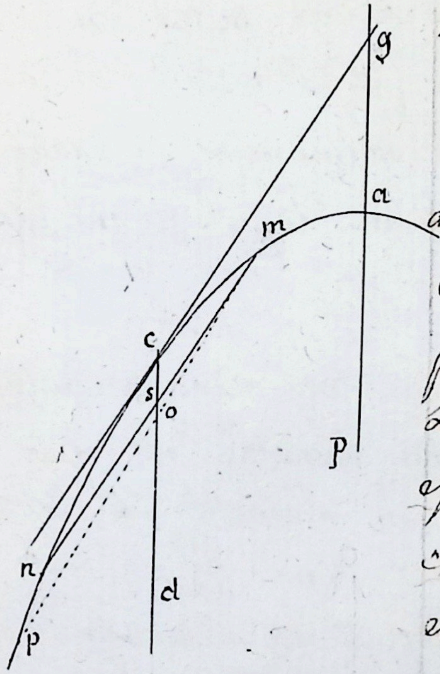
2°. que l'axe et le diametre ont la meme proprieté, sçavoir de couper chacun leurs doubles ordonnées en 2 parties egales. mais leur difference est que l'axe les coupe toujours a angles droits, et le diametre les toujours obliquement. —

Théo. 6e. fig. 20e.

84 Une corde quelconque MN coupée en 2 egalet. par un diametre CD, est paralelle à la tangeante CG au sommet C du diametre. —

Demonstration.

Si MN n'est pas parallele a la tangeant, on poura donc du meme point M mener a cette tangeante une paralelle Mp qui tombant au dessus au dessous de MN donnera MO = PO. (80), or

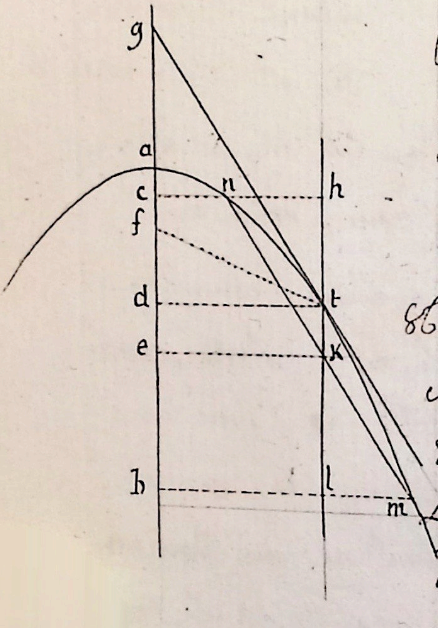


f. 22.

ns = m x par (l'hyp) . donc mo : ns :: mo : po. donc si on tire la corde pm elle sera paralelle au diametre cD ou a l'axe cD (286 geom). donc une paralelle a l'axe coupera la parabole en 2 points, ce qui est impossible (5?) donc une corde ne peut etre coupée en 2 egalemt par un diametre sans etre paralelle a la tangeante au sommet de ce diametre.

Cor. fig. 20e.

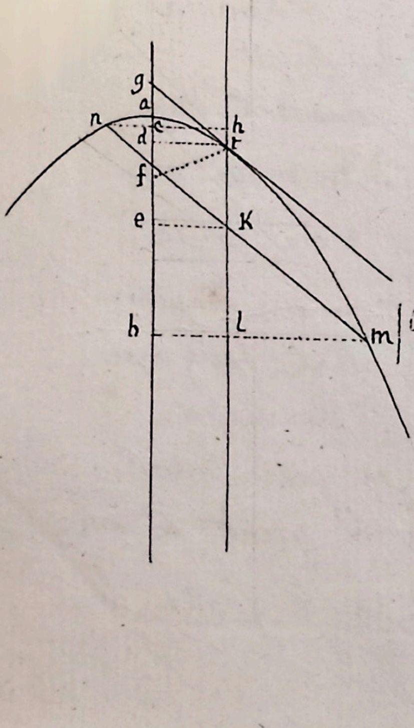
85. Si par le sommet c d'un diametre cD, on mene une paralelle cg a une double ordonnée mn au diametre cette paralelle sera tangeante en c. car si elle n'est pas tangeante, on poura donc mener par le point c une tangeante a la quelle la



double ordonnée mn ne sera parallele (84.) donc il y aura par le meme point 2 paralleles a une meme ligne. ce qui est impossible. donc &c

Théo. 7e. fig. 19.

86. Le quarré d'une ordonnée quelconque rk a un diametre est egale au rectangle de l'abcisse Tk par 4 tf. cette ligne tf est tirée du sommet T du diametre au foyer, pr. le 1er et le 3e. cas du théo. 8e.



Démonstration.

Soit kn=km=r. le reste comme dans le theoreme 8e. le $\overline{nk}^2 = \overline{kh}^2 + \overline{nh}^2$. $nn = uu + rr$. or prenez les 2 équations du theoreme 8e. $syy + tyy = xyy + 2qxy + qqx$, et $syy - uyy = xyy + rrx - 2rxy$. comme on a trouvé $T = r$, $q = r$ Substituez les valeurs de T et de q dans la 1ere équation, il viendra

Autre démonstration.

Soient $ad = x$
$dt = y$
Le paramètre de l'axe $= p$
______ du diamètre $= t$
$tk = u$
$km = z$
la tangeante $gt = q$
$gd = 2x$ (69)
$\overline{gt}^2$, ou $qq = px + 4xx$ (72) $=$
$4x\left(x + \frac{p}{4}\right) = 4x \times 4f = tx$

Les Δ semblables gdt, klm donnent
$gt : dt :: km : lm$, ou
$q : y :: z : lm = \frac{yz}{q}$
$gt : gd :: km : kl$, ou
$q : 2x :: z : kl = \frac{2xz}{q}$
Donc $mb = y + \frac{yz}{q} = y\left(\frac{q+z}{q}\right)$
$ab = ad + tk + kl$
$= x + u + \frac{2xz}{q}$
or $\overline{mb}^2 = ab \times p$ (48) : donc on a
$\frac{yy\,(q+z)^2}{q^2} = p\left(x + u + \frac{2xz}{q}\right)$, ou
$px\,\frac{(q+z)^2}{q^2} = px + pu + \frac{2xz}{q}$, ou
$\frac{pxq^2 + 2pqxz + pxz^2}{q^2} = \frac{pqx + pqu + 2pxz}{q}$,
ou x.ant et réduisant $pqxz^2 = pq^3u$
ou $xz^2 = q^2u$,
mais $q^2 = tx$; donc $xz^2 = txu$, et
$z^2 = tu$. C.q.f.d.

Corollaire

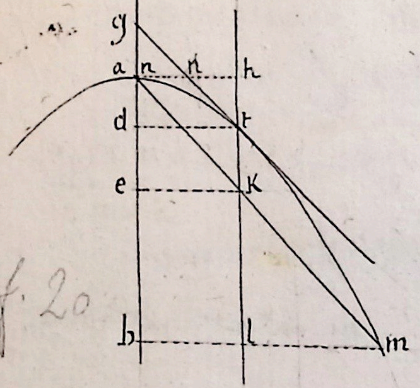
Les deux ordonnées mk, nk posées en sens contraire sont égales, parceque les deux racines de l'équation $z = \pm\sqrt{tu}$ sont égales et ne diffèrent que par le signe.

$syy + uyy = xyy + 2rxy + rrx$.
ajouté cette équation a la 2.de cy dessus, la somme sera
$2syy = 2xyy + 2rrx$, et par division $syy = xyy + rrx$. —
or dans cette dernière equation mettant p.r r sa valeur $\frac{uy}{2x}$,
on aura $syy = xyy + \frac{uuxyy}{4xx}$
et divisant par yy, on aura
$s = x + \frac{uux}{4xx}$, ou $4sxx = 4x^3 + uux$,
et divisant par x, on aura $4sx = 4xx + uu$, et par transposition
$uu = 4sx - 4xx$ et dans
l'equation $nn = rr + uu$,
p.r rr mettez sa valeur $\frac{uuyy}{4xx}$
on aura $nn = \frac{uuyy}{4xx}$
et au lieu de yy mettez px, on
aura $nn = uu + \frac{uupx}{4xx}$ et
mettant p.r uu sa valeur, il
viendra $nn = 4sx - 4xx$
$+ \frac{4sxps - 4xxpx}{4xx}$. et

par réduction $nn = 4sx - 4xx$ —
$+ps - px$. mais ce dernier —
rectangle est fait sous $s - x = tK$,
et sous $4x + p = 4tf$. car (61)
$tf = x + \frac{1}{4}p$. donc &c. c'est p. le 1er et le 3e. cas.

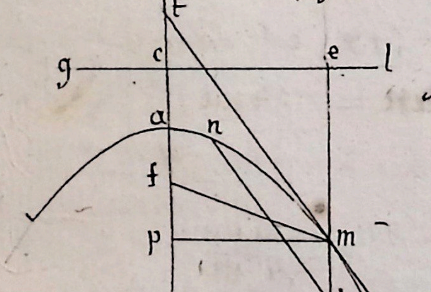
Dans le 2e. cas les lignes ayant les mêmes dénomination, on a $\overline{Kn}^2 = \overline{Kh}^2 + \overline{nh}^2$. $nn = 4xx + yy = 4xx + px$. or ce rectangle est fait sous $TK = x$ et sous $4tf = 4x + p$. La ligne Tf n'est pas tirée dans la figure.

fig. 20



f. 20

fig. 21



f. 23

Corollaire. 1er.

87 Une 3e. proportionelle à un abscisse quelconque et à l'ordonnée correspondante est le parametre du diametre TK, et le quarré d'une ordonnée quelconque est égale au produit de son abscisse par le parametre car soit x et y l'abscisse et l'ordonnée, dont T est la 3e.

pₚinelle, on aura $x : y :: y : t$.
donc $yy = tx$. c'est ce que
l'on vient de démontrer dans
le Théorème. donc l'équation
de la parabole raportée à ses
diametres, est précisément
la meme que celle de cette
courbe par raport à son
axe.

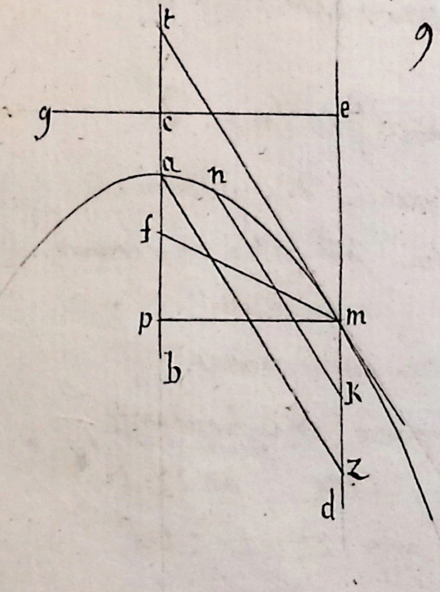
~~Prob.~~ Corollaire 2.e

88. ~~Quand~~ donc les quarrés des ordonnées
à un diametre sont entre eux comme
les abisses correspondantes.
car soit s une autre absisse et
z son ordonnée correspondante,
on aura $yy = tx$, et $zz = ts$
(86). donc $yy : zz :: tx : ts$
$:: x : s$, en divisant le
dernier raport par t. —

Cor. 3.e fig. 21.e

89. $\overline{MK}^2 = mK \times 4 mf$. (86).
donc $t = 4 Mf$, ou $t = 4 ml$
puisque $mf = ml$. (62)

donc le parametre d'un diametre quelconque est quadruple de la ligne tirée du sommet du diamètre au foyer. ainsy mf ou mz = $\frac{1}{4}t$ cequi convient aussy a l'axe. car af = $\frac{1}{4}p$ (60) corollaire 4. fig. 21.



90. Le parametre d'un diametre quelconque est egal a celuy de l'axe plus 4 fois l'abcisse correspondante a l'ordonnée mp menée par l'origine du diamètre a l'axe. c'est-àdire que l'expression du parametre d'un diametre quelconque est toujours $t = p + 4x$. car $\overline{az}^2 = mz \times t$ (86) $= ap \times t$, puisque $mz = at$ a cause des paralleles az, mt et que $at = ap$. (69) a cause de la tangeante mt. or le Δ rectangle mpt donne $\overline{mt}^2$ ou $\overline{az}^2 = \overline{pm}^2 + \overline{pt}^2$. donc ap $\times t = \overline{pm}^2 + \overline{pt}^2$, et mettant le

valeurs algébriques de ces lignes on aura $x \times t = px + 4xx = p + 4x \times x$. donc en divisant chaque membre par x, on aura $t = p + 4x$. d'ou il suit evidement que le parametre de l'axe est le plus petit de toutes les parametres.

Cor. 5.e fig. 21

91 Donc le parametre t d'un diametre quelconque est quadruple de la distance fm de son origine m au foyer f, ou de la distance du meme point M a la directrice. car on a vu que $fm = ft$ (69) $= af + at = \frac{p}{4} + x$. donc $4fm = p + 4x = t$. (90). –

Cor. 6.e fig. 21

92. Si on prend sur le diametre un abcisse $MK = mf = m\ell$ (62) $= ft$ (69) $= \frac{1}{4} t$. (91). L'ordonnée correspondante sera,

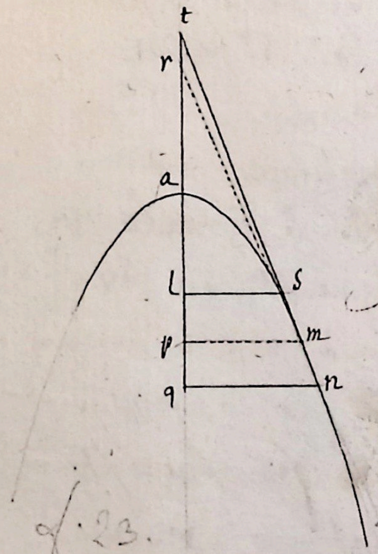
$\sqrt{\frac{1}{4}pt}$, ou $\frac{1}{2}$ T. donc la double ordonnée a un diametre quelconque et qui passe par le foyer est egale au parametre de ce diametre. ainsy qu'on l'a deja démontré pr. l'axe (59). La parabole est donc la seule courbe dans la quelle cette propriété convient egalemt. a l'axe et au diamètre.

Theo. 8e. fig. 22.

93. Si par les extremités n, s de 2 ordonnées SL, Nq a un diamètre quelconque, on fait passer une secante NS prolongée s'il est nécessaire jusqua cequelle rencontre le diamètre ou son prolongemt. en un point r on aura toujours : $\overline{ar}^2 = al \times aq$

Demonstration.

Soit $ar = a$. $al = x$. $aq = T$. rl sera $a+x$, et $rq = a+t$. les Δ semblables rsl, rqn



f. 23.

donnent $\overline{rl}^2 : \overline{rq}^2 :: \overline{sl}^2 : \overline{nq}^2$ $:: al : aq$. c'est-à-dire, $aa + 2ax + xx : aa + 2at + tt :: x : T$. donc $aaT + 2atT + txx = aax + 2atx + ttx$. or ôtant de part et d'autre $2aTx$, et transposant il vient $aat - aax = ttx - txx$, ou $aa \times t - x = tx \times t - x$. donc $aa = tx$, c'est-à-dire $\overline{ar}^2 = al \times aq$.

Cor. 1er. fig. 22.

94 Si on conçoit que les droites sl, Nq se meuvent parallelement à elles mêmes jusqu'à ce qu'elles se réunissent en une seule mp, la secante Nsr deviendra la tangente mt. les lignes al, aq deviendront chacune egale à p, et dans ce cas la position

subsistera toujours. donc on aura

$\overline{at}^2 = ap \times ap$. donc $at = ap$.

d'ou il suit qu'une soustangente

PT prise sur un diametre

quelconque sera double de l'absisse

correspondante ~~menée par~~ a l'ordonnée

menée par le point de contacte. donc la

formule des soutangeantes p.r

l'axe ou p.r un diamètre sera

toujours $pt = 2x$. donc &c.

Cor. 2.e fig. 22.

95. Le Théoreme sera encore vray

quand bien meme la secante OS

couperoit le diametre au dedans

de la parabole, ce qui arrive en

prenant l'ordonnée Mq de l'autre

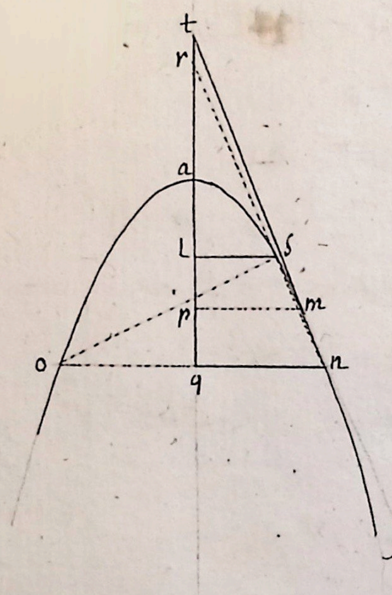
côte du ~~diametre~~ meme diamètre

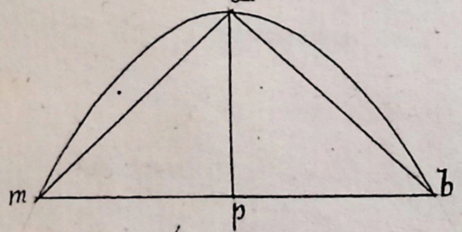
en Oq. La démonstration

ne differe pas de celle du Théoreme.

Scolie.

96. De tout ce qu'on vient de dire





f. 24

il suit que toutes les proprietés de la parabole sont constament les memes soit quon considere cette courbe par raport a son axe, ou par raport a son diametre.

97. un Δ est inscrit dans un segment parabolique MaB quand ayant pr. base la corde MB de ce segment, il a son sommet en quelque point a de l'arc MaB.

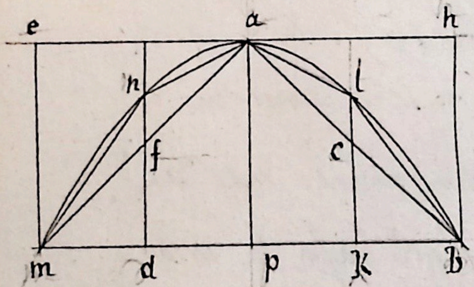
Theoreme 97. fig. 23.

98 si on inscrit dans un segment parabolique un Δ MaB dont le sommet a soit a l'origine du diametre qui divise MB en 2 egalement, ce Δ sera le plus grand de touts ceux que

Lon peut inscrire de la meme maniere dans le meme segment parabolique.

Démonstration.

par le point a soit menée la tangeante a E, elle sera parallele a l'ordonnée Mb (55). donc de touts les points de la courbe MaB, c'est le point a qui est le plus éloigné de la base Mb. touts les autres points de la courbe differens de a sont au dessous de la tangeante Eh. donc les Δ que l'on peut inscrire differens du Δ MaB ayant meme base MB, mais une hauteur plus petitte sont nécessairement plus petits que le Δ Mab. donc le Δ Mab est le plus grand de touts les Δ que l'on peut inscrire dans le segment MaB.



Cor.

77. Donc p.r inscrire dans les segmens anma, alBa les plus grands Δ possibles, il n'y a qu'a mener par les milieux f, c des cordes

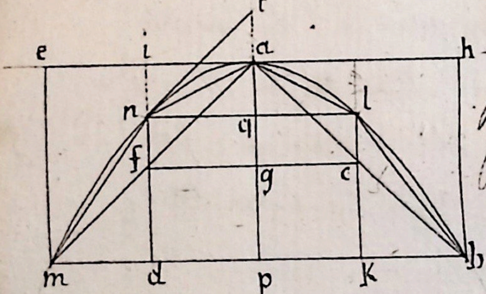
AM, APB, les diametres ND, LL et tirer dans chaque segment les droites AN, NM, AL, LB aux origines N, L de ces diamètres. —

Cor. 2e. fig. 20.

Le plus grand Δ inscriptible MAB vaut toujours plus de la moitié du segment MAPBM, ou il est inscrit. car soit la tangeante Eb au sommet A, et les lignes ME, Bb paralleles aux diametre AP. il est évident que le Δ MAB est la moitié du parallelograme MEbB de meme base et de meme hauteur. or MEbB est plus grand que le segment MAPBM. donc le Δ MAB est plus de la moitié de ce segment. —

Cor. 3e.

101. Si on continue a inscrire les plus grands Δ possibles dans les nouveaux segmens — MAN, ALB, on otera



f. 26.

encore par ce moyen plus de la moitié de chaque segment, et continuant toujours a inscrire des Δ, a mesure que l'on aura de nouveaux segmens, c'est-a-dire, en retranchant toujours du segment ~~et la demi~~ plus de la moitié de ce qui restera, on parviendra enfin a une grandeur plus petite qu'aucunne grandeur donnée; ce qui signifie que la somme de toutes ces Δ differera du segment parabolique, moins que d'une grandeur quelconque, si petitte qu'on la puisse supposer. Donc si on peut determiner le rapport de la somme de toutes ces Δ a une grandeur connue et quarable, il est évident que l'on aura la quadrature du segment parabolique, qui n'est autre chose que la somme de toutes ces Δ; or c'est ce que l'on va déterminer.

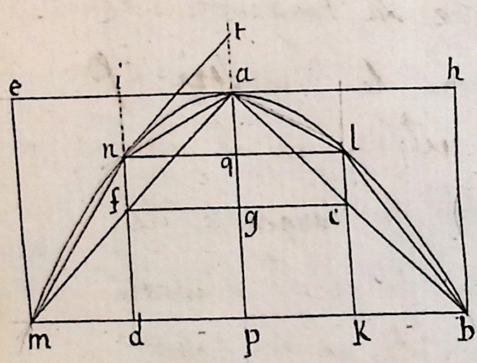
Cor. 4e.

102. Le Δ Mpa moitié du plus grand Δ MaB est quadruple du Δ Mha; et son autre moitié Bap est quadruple du Δ aLb.

Démonstration.

Soit ~~tirée~~ la tangeante Nt qui rencontre le diamètre ap prolongé en t (53). par le sommet a soit tirée la tangeante ai qui rencontre en i le diamètre prolongé en D. par les points N f soit tirée Nq, fg paralelles a la tangeante ai. cela posé, ND etant paralelle à Tp par (construc.) et NT à Ma, (84). dès lors Nf = at. or at = aq. (59). et aq = Ni a cause du paralellograme Nqai. donc Nf = Ni. donc fi est double de Nf. donc le Δ afi est double du

Δ anf, parceque ces 2 Δ ayant meme hauteur en a, le 1r. a une base double de celle du 2e. mais le Δ Mab est aussy double de anf. (cons). donc le Δ Man = afi. or afi = afg, puisque la fig. fgai est un parallelograme, mais afg n'est que le quart du Δ Map parceque les cotés du 1r. ne sont que les moitiés des cotés homologues du 2e. (const.) donc amn est aussy le quart de Map ou le Δ Map est quadruple de amn, ou Map : amn :: 4 : 1.



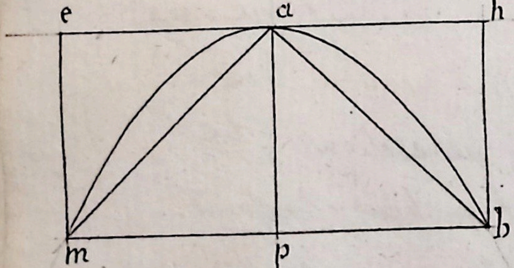
On prouvera par le meme raisonnement que le Δ abp est quadruple de abl. donc le Δ entier Mab est quadruple de la somme des 2 Δ amn abl. or ce que l'on vient de

démontrer du Δ Mab par raport aux Δ amn, aeBL, ou le démontrera du Δ amn par raport aux plus grands Δ inscriptibles dans les segmens m nm, aNâ, et du Δ abl par raport aux plus grands Δ inscriptibles dans les segmens e, 6l6, a la ainsy de suite donc on aura une progres. ou une suite de Δ inscrits dans le segment parabolique, les quels retranchant toujours plus de la moitié du segment ou ils seroient inscrits (100) donneront une somme qui poura etre prise p.r la surface du segment parabolique (101). mais cette progression est telle, que son 1.er terme est quadruple

du 2e. le 2e. quadruple du 3e, ainsy de suite a l'infini. ainsy si l'on represente la surface du Δ Mab par 1, on aura la progress. geomet. decroissante a l'infini ∺ $1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64}$ &c.

Cor. 8e.

103 Le segment parabolique avab m est au Δ Mab :: 4 : 3. soit a le 1er. terme de la progress. $\frac{a}{4}$ sera le 2e. soit s la somme de la progress. ou le segment Mab~~m~~. et toutes les antecedens de la progress. seront a toutes les consequents, comme un antecedent est a son consequent. donc $s : s-a :: a : \frac{a}{4}$. donc $as - aa = \frac{as}{4}$. donc $s-a = \frac{s}{4}$ en divisant par a, et faisant evanouir la fraction il vient $4s - 4a = s$, et par transp. $4s - s$, ou $3s = 4a$,



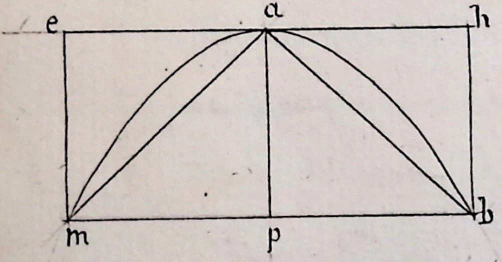
ou $3 \times S = 4 \times a$. Donc $S : a :: 4 : 3$
c'est-à-dire, qu'un segment parabolique
quelconque est toujours les
$\frac{4}{3}$ du plus ~~Δ qu~~ grand Δ qui puisse
luy estre inscrit, or tout Δ
est quarable, donc on a la
quadrature de la parabole.

Cor. 4e.

104 Donc en divisant la base
Mp du Δ MaB en 3
parties egales, augmentant
cette base d'une 3e. partie
on aura un Δ qui
sera les $\frac{4}{3}$ de MaB
et par consequent egale
au segment parabolique
(108). —

Cor. 7.e

105. Le segment parabolique est les $\frac{2}{3}$ d'un paralelograme m e h b circonscript.
Car le Δ m a b n'est que la moitié du parallelograme m e h b. or (103) le segment m a e b m vaut les $\frac{4}{3}$ du Δ m a b. donc il ne vaudra que les $\frac{2}{3}$ du double de ce Δ, c'est-à-dire, du paralelograme circonscrit m b h e.



106. Soit une demie parabole a c b sur touts les points de l'axe a b, soient élevées des perpend. D E, f g terminées a la parabole. si on fait mouvoir cette demie parabole autour de l'axe a b et qu'elle fasse une révolution entiere, elle engendrera un solide que l'on apelle paraboloide. La circonf. de la $\frac{1}{2}$ parabole produira la surface, et les ordonnées D E, f g, etc. de la solidité.

De cette génération du paraboloide, il suit qu'il est composé d'une

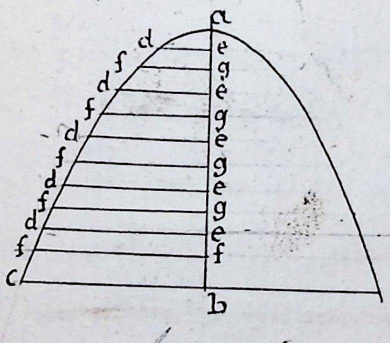
infinité de cercles produits par les ordonnées DE, fg les posé parallellement les uns sur les autres et dont touts les centres sont sur l'axe aB.

Théo. 10e fig. 24e.

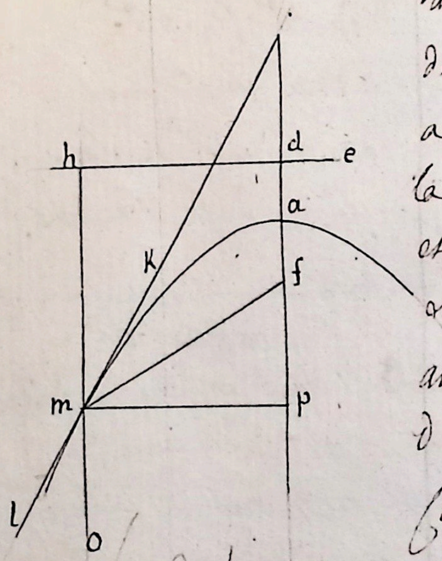
107. La solidité d'une paraboloïde est egal au produit de sa base par la ½ de sa hauteur, ou de son axe.

Démonstration.

L'axe aB est divisé en une infinité de parties aE, ag &c qui sont en progres. arith. dont le 1er terme est zero. ce qui évident par la quation du paraboloïde. or les quarrés des ordonnées DE, fg sont entre eux comme les parties aE, ag. (49). donc les quarrés des ordonnées sont en progress. arith. dont le 1er terme est zero. mais les cercles



f. 27.



28.

sont entre eux comme les quarrés de leurs rayons. donc les cercles qui composent le paraboloide et qui ont pr. rayons les ordonnées sont aussy en progres. arith. or dans une progres. arith. la somme de touts les termes est egale a la somme des extremes x.ées par la moitié du nombre des termes, et quand le 1er. terme est zero, la somme des extremes se reduit au dernier terme. donc la somme de touts les termes ou tranches qui composent le paraboloide est egale au produit de la base qui est la somme des extremes par la ½ de ~~nombre des termes~~ l'axe ad qui exprime le nombre des termes ou des tranches. donc la solidité d'un paraboloide est egale au produit de sa base par la ½ de son axe ou de

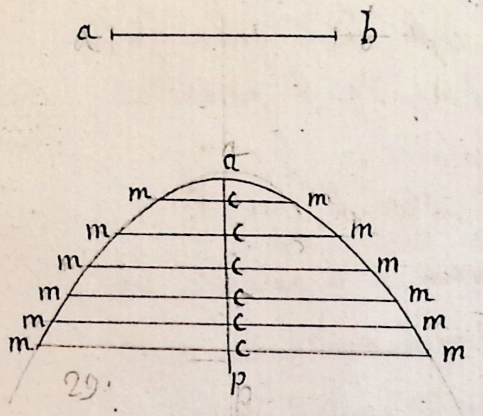
sa hauteur, c'est là ce qu'on apelle la cubature de la parabole ou paraboloide.

Prob. 4e. fig. 25.

108 Une equation a la parabole $px = yy$, dont les coordonnées x et y ne sont point perpend. etant donnée, décrire la parabole. —

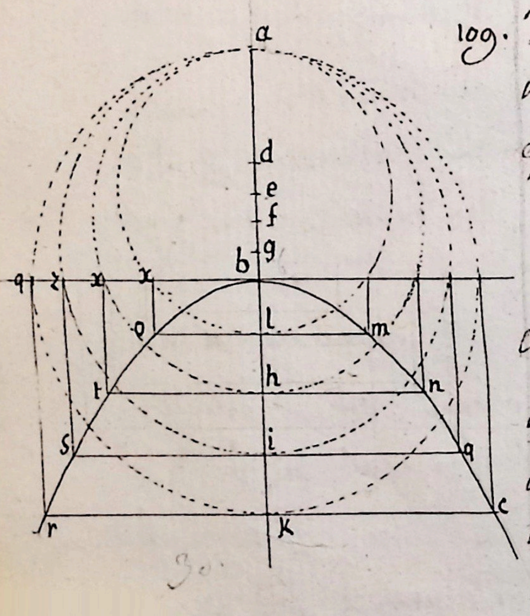
Sol.

Soit M le sommet du diametre MO dont le parametre est t, et l'origine des variables x et y est le point M, il faut décrire par M la parabole AMa. Soit prolongé om, et pris $mh = \frac{t}{4}$ (91) egale au $\frac{1}{4}$ du parametre du diametre MO. par h soit menée hE perpend a ho, ce sera la directrice. faittes l'angle KMf = Kmh, prenez Mf = mh, et menez par f la ligne Dp paralelle a MO. le point f sera le foyer.



(62). D p l'axe. coupéz D f en 2 egalemt. en A, ce sera le sommet de l'axe et de la parabole (63) qu'il faut décrire, et on la décrira comme à l'article (45).

Prob. 5 fi. 26. et 11.



109. Décrire par un mouvement continu une parabole dont le paramétre est donné, sçavoir la ligne ab.

Solution

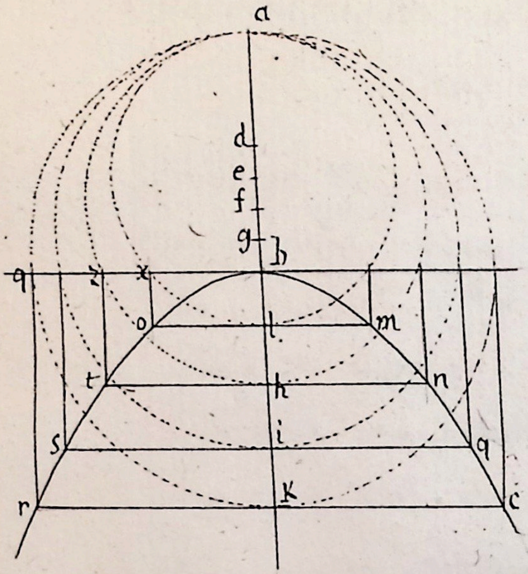
1°. prenez une ligne indefinie. app dont vous déterminerez l'origine au point a, divisez la en autant de parties egales ou inegales que vous voudrez aux points de division c, élevez des perpend. c m dont chacune soit moyenne proportionnelle entre son abscisse correspondante ac et le paramétre ab; faittes ensuite passer une ligne continue par leurs extremités

m a n de ces perpend. vous aurez une parabole. —

D.

ac : cM :: cm : aB par const. donc, en quelque point que ce soit, $\overline{cm}^2$ de l'ordonnée, est égale au rectangle ac x aB du paramètre par l'abcisse correspondante. donc la courbe trouvée est une parabole (48)

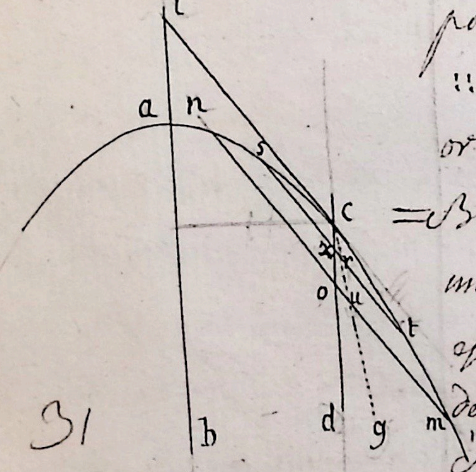
8°. soit la droite indefinie aK dont la partie aB est le parametre donné. au point B elevez la perpend. indefinie Bq. d'un point quelconque E pris sur aB avec un rayon Ea > aD moitié de aB decrivez un cercle. operez de meme aux points g, f, B, avec les rayons fa, ga, Ba, les cercles couperont



l'indefinie Bq aux points x, z, q &c avec les 2 lignes Bx, Bz achever le rectangle BO, achever demême les rectangles Bt, Bs, Br. si vous tirez une ligne continue par les points r, s, t, o, b, et que vous la continuiez par les points m, n, q, c, ce sera une parabole.

Demonstration.

Soit le paramètre AB = p. par la propriété du cercle Bl : Bx :: Bx : p. donc $\overline{Bx}^2 = Bl \times p$. or lo = Bx (const.) donc $\overline{lo}^2 = Bl \times p$. donc le point O est à une parabole dont le parametre est AB (48) on démontrera demême que les points t, s, r sont aussy à la meme parabole donc la courbe qui passe par les points r, s, t, o, b est une parabole,



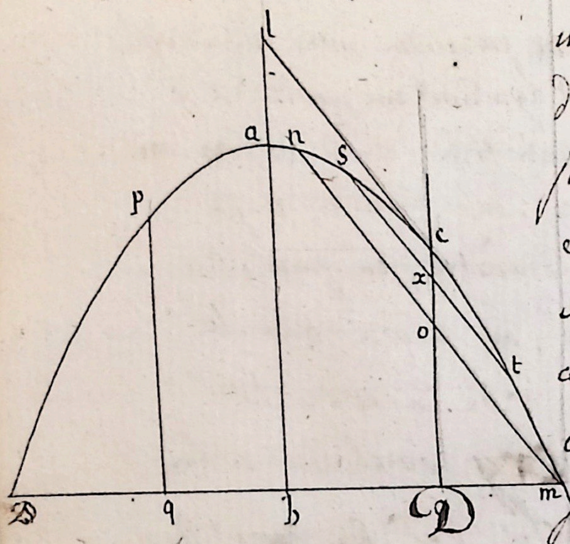
Prob. 6e. fig. 27e.

11a Trouver le diamètre, qui l'axe

et le sommet d'une parabole donnée.

Solution.

1° tirés dans la parabole 2 cordes ts, mn paralleles entre elles, divisés les en 2 egalemt aux points x, o par lesquels tirés CD, ce sera un diamètre. car si CD n'est pas un diamètre, ou paralelle a l'axe, on poura par le milieu v de la corde ts tirer vg paralelle a l'axe ab, dès lors ts sera paralelle a la tangeante lc au sommet du diamètre cg. (84). ainsy mn sera aussy pararalelle à la même tangeante. donc mn sera coupée en 2 egalemt. en y, par le diamètre cg. (80). or (suppo) mn est coupé en 2 egalemt. en o. donc no = mn, ce qui est absurde. donc une ligne CD qui coupe en 2 egalemt. 2 cordes paralleles, est necessairement un



f 32.

diamètre. —

2°. Du point M ou l'une des cordes coupe la parabole abaissés une perpendiculaire MD sur le diametre CD, et prolongés la jusqua la courbe au point S. Sur le milieu de cette perpend. MS, élevés une autre perpend. AB, ce sera l'axe, et le point A ou elle rencontre la courbe, en sera le sommet. —

Prob. 7°. fig. 27

110. Trouver un diamètre qui passe par un point donné et la position des ordonnées à ce diamètre.

Solution. —

1°. cherchés un diamètre quelconque PQ. (110). ensuite par le point donné C, tirés CD parallelle a Pq, ce sera le diametre cherché. car Pq étant parallelle a l'axe, CD luy sera aussy parallelle, et

par conséquent ce sera un diametre. —

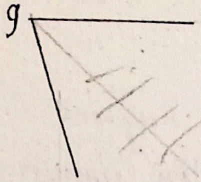
2º tirer une tangeante CL au sommet C du diametre CD, et par un point quelconque N de la courbe, mener une paralelle MN a cette tangeante, elle sera coupée en 2 egalemt. par le diametre CD. (80) par conséquent MN sera une double ordonnée au diametre CD, et sa moitié NO sera une ordonné. —

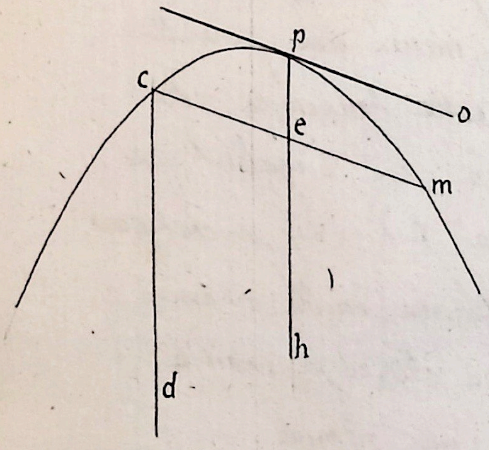
Prob. 8. fig. 28.

112. Trouver un diametre CN qui fasse avec ses ordonnées CM et avec la tangeante NO un angle égal a un angle donné g.

Solution.

Trouvez un diametre quelconque CD. (110). au point C ou ce diametre coupe la parabole faites l'angle DCM = g donné.





par le milieu P de CM tirez Ph parallele à CD. des lors Ph est un diametre donc CM est la double ordonnée. or l'ordonnée CP forme l'angle CEp = g donné. car a cause des paralleles CD, ph, l'angle DCM = CEp. or DCM = g par (const.) donc CEp = g. ensuite par le sommet P du diamétre tirez NO parallele à CM. elle sera tangeante au sommet P. (85). et l'angle Epo formé par le diametre et la tangeante égale CEp = DCM = g. donc &c. —

§. 3. Des Propriétés de l'Ellipse considerée sur un plan

183. Soit sur un plan une droite AB donnée de grandeur, et 2 points fixes, fig. 54. sur cette ligne à égale distance de ses extremités : l'Ellipse est une

courbe telle que la somme $fm + gm$ des distances de chaque point m aux 2 point f, g. que l'on nomme les foyers, est constamment égale à la droite AB qui est l'axe de l'ellipse.

Cor.

14 De là on peut aisément décrire l'ellipse d'un mouvement continu. Prenez un fil égal à l'axe AB; atachez en les extremités aux 2 foyers f, g tenez ce fil toujours également tendu par le moyen d'un stile que vous conduisez autour des foyers jusqu'à ce qu'il revienne au point d'où il est parti, et l'on aura une ellipse. Car en quelque point M, que se trouve la pointe du stile, on a toujours $gm + fm = AB$, ce qui est une

propriété de l'Ellipse par sa définition.

115. Il est encore évident que les extrémités de l'axe ab sont des points de la courbe: car quand le stile m est arrivé en a ou en b, on a toujours ag+af, ou bf+bg = ab. De plus il suit encore que la courbe deviendra un cercle quand la distance fg des foyers sera nulle. car dans ce cas toutes les distances gm seront egales entre elles et a la ½ de l'axe ab.

La ligne ab est le grand axe. Les extremités ab sont les sommets de l'Ellipse. Le point c milieu de l'axe est le centre. Une droite DcE perpend. au grand axe, terminée de part et d'autre a l'Ellipse, et qui passe par le centre est le petit axe; le

Theo. 2e. fig 31.

Nota Dans l'hyperbolle il est plus grand (258).

148. Le quarré d'une ordonnée pm au grand axe est plus petit que le rectangle du segment am par le parametre p de cet axe.

Demonstration.

$p = \frac{2bb}{a}$ (120). cm = x. am = a−x. il faut donc demontrer que $\overline{pm}^2$ est < am × p ou que yy est < a−x × p, ou que yy est < a−x × $\frac{2bb}{a}$. yy = $\frac{aabb - bbxx}{aa}$, ainsy on aura $\overline{pm}^2$: am × p :: $\frac{aabb - bbxx}{aa}$: a−x × $\frac{2bb}{a}$

divisant le dernier rapport par $\frac{bb}{a}$, on aura $\overline{pm}^2$: am × p :: $\frac{aa - xx}{a}$: a−x × 2. divisant encore le dernier rapport par a−x, on aura $\overline{pm}^2$: am × p :: $\frac{a+x}{a}$: 2. xant ensuite le

dernier rapport par a, on aura
$pm^2 : am \times p :: a+x : 2a$. or
$a+x = bm$. $2a = ab$. donc pm^2
$:: am \times p :: bm : ab$. mais bm
est $<$ ab. donc pm^2 est $<$ $am \times p$.

149 Remarque. C'est ce deffaut
dégalité du quarré d'une ordonnée
quelconque pm avec le rectangle
du segment am par le parametre
qui a fait apeller cette courbe
une elipse : car le mot grec
ελιπσις signifie ~~elipse~~ deffaut.

On peut raisonner de même
pr. une ordonnée au 2d. axe dont
le parametre est $\frac{2aa}{b}$.

Probl. 1er. fig. 31e.

150 Une équation à lellipse $ab - xx = \frac{cyy}{b}$ étant donnée, décrire une
elipse quand les coordonnées
font un angle droit.

Solution.

1º Chercher une moyenne proportionnelle entre a et b qui soit f, ainsy $ff = ab$. ainsy l'équation sera $ff - xx = \frac{cyy}{d}$. On fait ce changement, parceque ab étant l'expression du quarré du $\frac{1}{2}$ axe dont les parties se nomment x, cette expression doit aussy être un quarré. —

2º. Soit C l'origine des inconnues x qui vont vers a et vers b, et y qui vont vers D et vers E. Le meme point C doit aussy etre le centre de l'ellipse. Soient faittes Ca et Cb chacune $= f$. ab sera le grand axe si c surpasse d. le petit, si c est moindre que d.

3º. pr avoir l'axe conjugué à l'axe ab, soit fait $c : d :: ff : \frac{dff}{c}$ et soit prise CD ou CE chacune egale à $\sqrt{\frac{dff}{c}}$. Pour

trouver $cD = cR = \frac{Dff}{c} = n$, cherché une moyenne proportionelle entre c et D qui sera nommée g: ensuite chercher a ces 3 grandeurs c, g, f une 4e. proportionelle qui sera $n = \frac{Dff}{c}$. Car puisque c, g D sont en proportion continue, on aura $c : D :: cc : gg$; mais ayant encore $c : g :: f : n$, on aura $cc : gg :: ff : nn$. donc $c : D :: ff : n = \frac{Dff}{c}$. Ainsy $n = DE$ sera donc l'axe cherché.

4°. chercher les foyers f, g. (118) et décrivez l'elipse (184).

Prob. 2. fig. 32.

158 Une Ellipse ABM et les foyers f, g étant donnés, mener une tangente par un point M aussy donné sur l'ellipse.

Solution.

ayant mené fm et gm, et prolongé fm jusqu'en L, ensorte que mp, mg, soit tirée gp. La ligne DM que l'on menera par le point donné m, et par le milieu G de gp sera tangeante en M.

Démonstration.

D'un autre point quelconque h pris sur DS, soient tirées les droites fh, gh, hp. Par (const.) mg = mp. pL = gL, donc DS est perpend. sur Gp. donc le Δ ghp est isoscelle. Donc fh + hg = fh + hp. or fh + hp est > fp = fm + mg (const) = AB. (113) donc fh + hg est plus grand que AB, donc le point h est hors de l'Ellipse. Comme il en sera ainsy de toutes les points de la ligne DS excepté le point M, il suit que DS ne touche l'Ellipse qu'en M.

Cor. 1er

152. Donc la tangeante DM forme des angles égaux gmD, fmS d'un même

coté avec la ligne tirée du point de contacte aux foyers. Car fms = pml, et Dml = gml, à cause des lignes égales pm, gm, fl, lg (cons). —

Cor. 2.

153. Donc si l'un des foyers f est un point lumineux toutes les rayons partis de ce point, et réfléchis par la surface de l'Ellipse passeront nécessairement par l'autre foyer g. Car l'angle d'incidence fmt = gmD (152), donc l'angle gmD sera l'angle de reflexion. C'est par cette raison que les points g, f, sont apellés foyers de l'Ellipse. —

Cor. 3.

154 Si l'on mène mq paralelle à gp, l'angle gmL est droit, puisque (const), gp est perpend. à Dm. —

Cor. 4.

155. La ligne mq partage l'angle

Gm f en 2 egalemt. Car à cause de Mq parallele à gp, l'angle fmq = fpg = mgp = gmq.

Cor. 5e.

156. La perpend. Mq au point de contacte ne passe point par le centre de l'Ellipse. car à cause de Mq paralelle a gL, fm ; mp = mq :: fq : gq. or fm est > mp, donc fq est > gq. donc le point q n'est pas le centre de l'Ellipse (116.). C'est encore une difference de l'Ellipse au cercle dans le quel toutte ligne perpend à un point de la circonf. passe par le centre (92 géo)

Cor. 6e.

157 La ligne Mc menée du point de contacte au centre de l'Ellipse fait avec la tangeante de M un angle oblique cML : car l'angle gmL est droit (154), donc cML est oblique.

Cor. 7.

158. Si la droite Mq divise l'angle
gmf formé par les droites menées
des foyers à un point de l'ellipse,
elle sera perpend. à la tangeante
qui passe par le sommet de l'angle.
Car l'angle gmq = qmf (hyppot)
et l'angle gmD = fmS. (152)
donc l'angle gmD = qmS. donc
mq est perpend. sur DS. —

Cor. 8°.

159. Une perpend. DS à l'extremité
de la droite Mq sera tangeante
à l'ellipse en M. Car soit
prolongé fm jusqu'en p, ensorte
que mp = mg. soit tirée gp.
l'angle gmD = fmS (152) = pml,
donc les 2 Δ gmL, pmL sont
parfaitem.t egaux: donc gL = pL.
Donc la droite DS passe par le
milieu de gp, donc elle est
tangeante en M (151). —

Cor. 9e.

160 La tangeante DM est déterminée à rencontrer l'axe prolongé : car l'angle gLD est droit, et l'angle LgD est aigu.

Cor. 10e.

161 Si par le centre c l'on mène au point L, milieu de gp, la droite cL, et une autre droite cK paralelle à la tangeante DM, on aura cL, ou MK égale à la $\frac{1}{2}$ du grand axe AB. Car les droites Gf, gp, étant coupées chacune en 2 également, l'une en c, l'autre en L, les Δ cgL, gfp sont semblables. Donc Cg : cL :: gf : fp. Or cg est $\frac{1}{2}$ de gf, donc aussi cL ou MK, à cause du parallelogramme cLMK, est égal à la $\frac{1}{2}$ fp = AB (cons).

162. 1° ayant ~~[illegible]~~ élevé au point M

la perpendiculaire mq, qui rencontre en q sur l'axe AB, ~~la perpend. MQ~~, cette ligne est apellée la perpend., ou la Normale correspondante au point M.

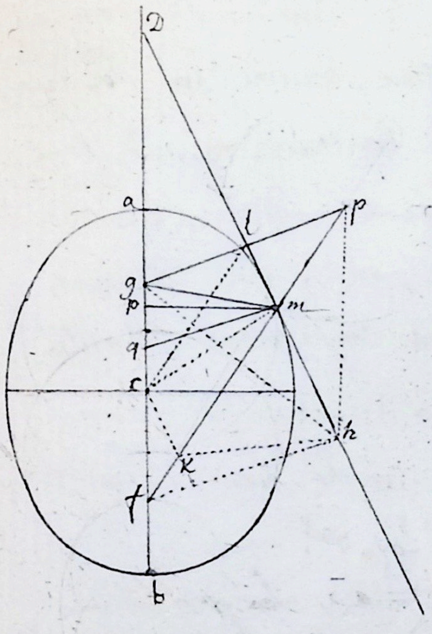
2°. La partie pq de l'axe comprise entre l'extremité Q de la normale et l'extremité P de l'ordonnée, s'appelle sous-normale ou sous-perpendiculaire.

3°. La partie DM de la tangente comprise entre le point de contacte et le point D où elle rencontre l'axe prolongé se nomme tangeante.

4°. La partie Dp de l'axe comprise entre l'ordonnée qui passe par le point de contacte et la rencontre D de l'axe par la tangeante se nomme Sous tangeante.

Proble. 8°. fig. 33°.

163 trouver l'expression analytique



de la Sousnormale pq. —

Solution

Les droites Mq, gp étant chacunne perpend. à la tangente DM (cons.), sont paralleles. Donc les Δ gfp, fqM sont semblables et donnent $fp : gf :: fm : fq$, c'est-à-dire, $2a : 2c :: a + \frac{cx}{a}$ (123)* $: fq = \frac{aac + ccx}{aa}$. Or si de fp $= c + x$, on ôte fq, on aura pq $= \frac{aax - ccx}{aa}$. Donc en mettant BB pour $aa - cc$, on aura $pq = \frac{BBx}{aa} = \frac{px}{2a}$ en faisant usage du parametre du $\frac{1}{2}$ grand axe.

Cor. 1.er

164. L'équation $pq = \frac{BBx}{aa}$ donne $aa : BB$ $:: x : pq$. ou $\overline{ca}^2 : \overline{cE}^2 :: cp : pq$. d'où il suit que l'abscisse cp sera toujours plus grande que la sous normale pq, tant que ca sera plus grande que cE.

* car $fm + gm : fg :: fp - gp : fm - gm$, ou $2a : 2c :: c + x - c + x$, ou $2x : \frac{4cx}{2a}$ $= \frac{2cx}{a}$. Donc (245 calcul) fm $= a + \frac{cx}{a}$.

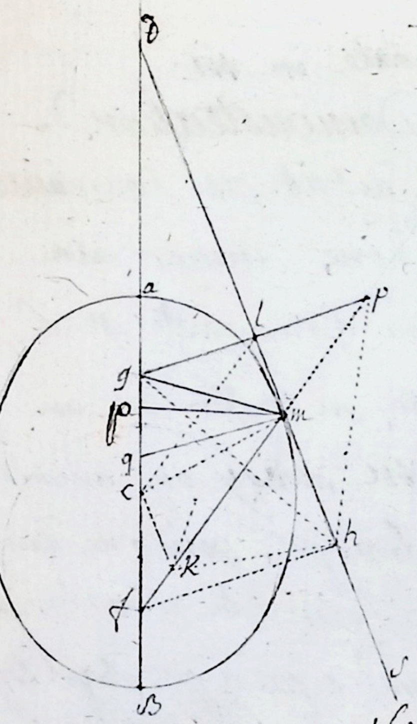
Donc le point q ne Coincide jamais avec le centre C dans la même supposition, comme on l'a déja vû (156). Au Contraire quand les axes seront égaux, comme il arrive dans le cercle, on aura toujours, cp = pq, et par conséquent toutes les perpend. aux tangeantes d'un cercle doivent passer par le centre.

Cor. 2e.

165 Si l'on fait $x = a$, l'expression $\frac{BBx}{aa}$ devient $\frac{BB}{a} = \frac{p}{2}$. D'où il suit que quand le point p tombe sur le point A, la sous normale est égale au paramètre du $\frac{1}{2}$ grand axe, et ainsy la courbure de l'Ellipse en ce point est égale à celle d'un cercle qui auroit pr rayon le même paramètre. —

Probleme 4e. Fig.

166 Trouver l'expression analytique de la sous tangeante Dp.



Solution.

Le Δ Dmq étant rectangle en M (cons), et pm une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur la base, on aura $pq : pm :: pm : Dp$. donc $Dp = \frac{\overline{pm}^2}{pq} = \frac{yy}{\frac{bbx}{aa}}$

$$= \frac{aa - xx \times \frac{bb}{aa}}{\frac{bbx}{aa}} = \frac{aa-xx}{x}.$$

Cor. 1r. fig. 34.

167. L'équation $Dp = \frac{aa-xx}{x}$ donne $x : a-x :: a+x : Dp$, c'est-à-dire, $cp : ap :: Bp : Dp$. Ce qui fournit un moyen facile de mener une tangente à l'ellipse, quand l'axe, et un point sur l'ellipse sont donnés.

Du point donné M abaissez sur l'axe AB l'ordonnée mp, et faites cette proportion, $cp : ap :: Bp$ est à une 4e ligne que vous porterez de D en p. Par les points D, m, tirez Dm, elle

sera tangeante en M.

Demonstration.

Si Dm n'étoit pas tangeante, on pourroit donc mener au point M, une tangeante Ms qui tomberoit au dessus ou au dessous de Dm, ainsy on auroit cp : ap :: bp : ps, puisque dans ce cas ps seroit la soustangeante. mais (supp) cp : ap :: bp : Dp ; donc ps = pD, ce qui est absurde. Donc Dm est tangeante en M.

Cor. 2e.

168. Si on joute $cp = x$ à $Dp = \frac{aa-xx}{x}$, on aura $Dc = \frac{aa-xx}{x} + x = \frac{aa-xx+xx}{x} = \frac{aa}{x}$. Donc $Dc \times x = aa$. Donc $x : a :: a : Dc$, c'est-à-dire, cp : ca :: ca : cD. Ce qui donne un autre moyen de mener la tangeante Dm en suivant la métode du corollaire precedent.

Cor. 3.

169 Si de $CD = \frac{aa}{x}$ on ôte $ac = a$, on aura $aD = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x}$, d'où l'on tire encore cette proportion $x : a-x :: a : aD$, c'est-à-dire, $cp : ap :: ac : aD$. Ce qui peut encore servir à déterminer les tangeantes pour un point quelconque M. —

Cor. 4.

170. Puisque l'on a la valeur algébrique des lignes pq, pm, pD, il sera facile de trouver les expressions analitiques de la normale Mq, de la tangeante Dm, et celles des lignes cq, aq, ou Bq et Dq.

1° Le Δ rectangle qpm donne $mq = \sqrt{\overline{pm}^2 + \overline{pq}^2} = \sqrt{BB - \frac{BBxx}{aa} + \frac{B^4x^2}{a^4}}$.

2° Le Δ rectangle Dpm, donne $Dm = \sqrt{\overline{mp}^2 + \overline{pD}^2}$, —

$= \sqrt{aa-xx \times \frac{bb}{aa} + \overline{\frac{aa-xx}{x}}^2}$;

en réduisant tout au même

dénominateur, $Dm = \sqrt{aa-xx \times \frac{bbxx}{a^2x^2} + (a^2-x^2)^2 \times \frac{a^2}{a^2x^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2x^2 - b^2x^4 + a^6 - 2a^4x^2 + a^2x^4}{a^2x^2}}$

$\frac{x\sqrt{aa-xx}}{aa} \times \sqrt{\frac{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}{xx}}$.

3° si de $cp = x$ on ôte pq

$= \frac{bbx}{aa}$, on trouvera $cq = \frac{aa-bb \times x}{aa}$

$= \frac{ccx}{aa}$, puisque $cc = aa - bb$.

4°. si de $ac = a$, l'on ôte

cq, et si à ca ou bc on ajoute

cq, on trouvera aq ou $bq =$

$\frac{a^3 \mp a^2x \pm bbx}{aa} = \frac{a^3 \mp ccx}{aa}$. . .

5° enfin si de $cD = \frac{aa}{x}$ (168)

on ôte cq, on trouvera $Dq =$

$\frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{a^2x}$, ou $Dq = \frac{a^4 - c^2x^2}{aax}$.

Cor. 5e.

171. En se servant du paramètre

dans l'expression des lignes que

l'on vient de chercher, on trouvera

1°. $mq = \frac{\sqrt{2a^3p - 2ap\,xx + p^2x^2}}{4aa}$

2°. $MD = \frac{\sqrt{2a^5 - 4a^3x^2 + 2ax^4 + a^2px^2 - px^4}}{2axx}$.

3°. $cq = x - \frac{px}{2a}$, ou $2a - p \times \frac{x}{2a}$. —

4°. aq ou $Bq = \frac{2aa \mp 2ax \pm px}{2a}$. —

5°. $Dq = \frac{2a^3 - px^2 - 2ax^2}{2ax}$. —

Probleme 5e. fig. 35e.

172. Supposant que par le point M, on ait mené l'ordonnée Mk, au petit axe cE, et prolongé la normale mq jusqu'à ce qu'elle rencontre le petit axe en r il faut trouver l'expression analytique de la sous normale Dk, prise sur le petit axe DE. —

Solution:

les Δ semblables pqm, rml

donnent $pq : pm :: ml : lr$, c'est-a-dire

$\frac{bbx}{aa} : y :: x : \frac{aay}{bb} = lr = \frac{ty}{2b}$, en se

servant du parametre du $\frac{1}{2}$ petit

axe. —

Cor.

173. L'expression $lr = \frac{aay}{bb}$ donne

cette proportion; $bb : aa :: y : lr$,

ou $\overline{cl}^2 : \overline{ca}^2 :: cl : lr$. Donc

puisque le quarré cl est toujours

plus petit que $\overline{ca}^2$, l'absisse

cl sera aussy plus petit que

la normale lr, et parconséquent

le point r sera toujours au dela

du centre c par raport au point

l. De plus si l'on fait $y = b$, ou

$cl = cl$, on aura $lr = t$, d'où

il suit encore que la corbure

de l'ellipse en l est égale à

celle d'un cercle qui auroit pr.

rayon le parametre t du $\frac{1}{2}$ petit

axe.

Prob. 6.e

174 Supposant toujours l'ordonnée ML au 2.d axe, et la tangeante Dm prolongée, jusqu'à ce qu'elle rencontre le ½ petit axe en b, il faut trouver l'expression de la soutangeante Lb prise sur le petit axe.

Solution.

Les △ rectangles semblables Lmr, Lmb donnent $Lr : Lm :: Lm : Lb$ et en mettant les valeurs analitiques $\frac{aay}{bb} : x :: x : Lb = xx \times \frac{bb}{aay}$.

Or mettant p.r xx sa valeur $bb - yy \times \frac{aa}{bb}$ trouvée, (139, 142) on aura $Lb = \frac{bb - yy}{y}$.

Cor. 1.r

175. L'équation $Lb = \frac{bb - yy}{y}$ donne $y : b + y :: b - y : Lb$, c'est-à-dire, $cl : Dl :: El : bL$. Donc le point m et le petit axe étant donnés, si on abaisse l'ordonnée ML, la soutangeante Lb sera

determinée, ainsy on peut mener la tangeante bm. (167).

Cor. 2.

176. Si on ajoute $cl = y$ à $Lb = \frac{cbb - yy}{y}$ on trouvera $cb = \frac{bb}{y}$; ce qui donne $y : b :: b : cb$, ou $cl : ce :: ce : cb$, proprtion qui peut encore servir à mener les tangeantes par le moyen du petit axe (167).

Corollaire 3e.

177. Si de $cb = \frac{bb}{y}$ on ote $cE = b$, on aura $Eb = \frac{cbb - by}{y}$ d'où l'on tire $y : b :: b - y : eb$, ou $cl : ce :: Le : Eb$; ce qui est un nouveau moyen d'avoir la tangeante bm.

D'où il suit que l'on peut se servir indiferament du grand, ou du petit axe pr mener une tangeante par un point quelconque de l'ellipse different des extremités des axes.

Corollaire 4e.

178 Connoissant les expressions analitiques des lignes rL, mL, Lb, on

trouvera celle de la tangeante Mh, de la normale MV terminée au 2e. axe, ainsy que celle des lignes CV, EV, ou DV et hV. On ne détaillera pas les operations qu'il faut faire pr. les trouver, il suffit d'avoir les résultats qui suivent.

1°. $mh = \sqrt{\left(\frac{bb-yy}{y}\right)^2 + xx}$

$= \sqrt{\frac{b^4-2b^2y^2+y^4}{yy} + \frac{a^2b^2-a^2y^2}{bb}}$

$= \sqrt{\frac{b^6-b^4y^2+b^2y^4+a^2b^2y^2-a^2y^4}{b^2y^2}}$

2°. $mr = \sqrt{\frac{a^4y^2}{b^4} + \frac{a^2b^2-a^2y^2}{b^2}} = \frac{a}{bb}\sqrt{b^4-b^2y^2+a^2y^2}$

3°. $cr = rl - cl = \frac{a^2y}{b^2} - y = \frac{a^2y-b^2y}{b^2} = \frac{c^2y}{bb}$.

4°. er ou $dr = ce + cr$, ou $cd - cr$

$= b \pm \frac{c^2y}{bb} = \frac{b^3 \pm c^2y}{bb}$, ou (à cause de $cc = a^2-b^2$) $= \frac{b^3 \pm a^2y \mp b^2y}{b^2}$.

5°. $hr = lh + lr = \frac{b^2-y^2}{y} + \frac{a^2y}{b^2} = \frac{b^4-b^2y^2+a^2y^2}{b^2y}$,

ou (à cause de $cc = a^2-b^2$) $= \frac{b^4+c^2y^2}{b^2y} = \frac{b^2}{y} + \frac{c^2y}{b^2}$.

1°. $Mh = \sqrt{a^2y^2 + B^4 - BByy} \times \frac{bb-yy}{BByy}$.

2°. $MV = \frac{a}{BB}\sqrt{B^4 - B^2y^2 + a^2y^2}$

3°. $CV = \frac{aay - BBy}{BB} = \frac{ccy}{BB}$.

4°. EV ou $DV = \frac{B^3 \pm a^2y \mp BBy}{BB}$, ou

$\frac{B^3 \pm ccy}{BB} = B \pm \frac{ccy}{BB}$.

5°. $hV = \frac{B^4 + a^2y^2 - B^2y^2}{BBy} = \frac{BB}{y} + \frac{ccy}{BB}$.

179 Remarquez. Les calculs qu'on vient de faire pr. trouver les expressions des lignes pq, pD, mq, mD, cq, cD, aq, ad, ou Bq, BD, et leurs homologues su

le petit axe, supposent l'origine des x au centre c. Si on avoit fixé l'origine des x à tout autre point de l'axe, les memes lignes auroient eu des expressions différentes, sans changer de valeurs absolues. Toutes les propriétés que l'on a examinées jusqu'icy ont rapport à l'Ellipse considerée relativement à ses axes; dans le reste, on va faire voir que toutes ces propriétés ont aussy lieu par rapport aux diametres de cette courbe.

180 De l'Ellipse considerée par rapport à ses diametres.

Theoreme 8e. fig. 31e.

Si on joint les extremités p, b de 2 ordonnées quelconques égales pm, fb par une droite pb, cette droite passera par le centre et y sera coupée en 2 également.

Démonstration.

Les Δ semblables cpm, cfh donnent pm : fh :: cm : cf :: cp : ch : or pm = fh (par l'hypotese) donc cm = cf, et cp = ch. ce qui fait voir que la distance fm des ordonnées égales est coupée en 2 égalemt. par la droite ph ; mais le centre de l'ellipse coupe aussy en 2 égalemt la meme distance fm, (152), donc le point c est le centre. Donc la droite ph passe par le centre et y est coupée en 2 égalemt.

181 On apelle diametre toutte ligne droitte ph qui passe par le centre et qui se termine de part et d'autre a l'ellipse, ainsy tout diametre est coupé en 2 égalemt. au centre.

Theo. 6.e

182 Reciproquement les ordonnées fm, gh abaissées des extremités

d'un diametre sont égales et les abscisses aussy.

Démonstration.

Les △ semblables cpm, cfh donnent cp : fh :: pm : fh :: cm : cf. or cp = ph, puisque ph est un diametre (supp.) donc pm = fh et cm = cf. —

Theoreme 7e. fig. 39

183. Si par le point m de contact et par le centre on mene un diametre Mu et une corde quelconque gt parallele à la tangeante mT, elle sera divisée en 2 égalemt. au point o. —

Démonstration.

Autre démonstration.
Voyez le corollaire de la 2e. démonstr. de l'article 197 ci-après.

Par les points l, m, o, g soient menées les lignes lk, oq, gx, mp perpend. à l'axe ab, et par o la droite ron parallele à l'axe ab, soit ac ou bc = a; cb, ou cl = b; cp = x; pm = y; cq = m; qx = or = z; qk = on = s; ax sera a + m − z, bx = a − m + z. ak = a + m + s, bk = a − m − s. Il faut prouver que go = ol ou, ce qui est la

meme chose, que $ro = no$. —

Les △ semblables cpm, coq, donnent

$cp : pm :: cq : oq$, ou $x : y :: m : \frac{my}{x} = oq$

$= rx = kn$. L'on a $ct = \frac{aa}{x}$. (168) et ch $= \frac{bb}{y}$ (176). or les △ semblables tch, org, onl, donnent $ct : ch :: or : rg$.

ou $\frac{aa}{x} :: \frac{bb}{y} :: z : \frac{bbzx}{aay} = rg$. ensuite tc

$: ch :: on : nl$, ou $\frac{aa}{x} : \frac{bb}{y} :: s : \frac{bbsx}{aay}$

$= ln$. donc $xg = \frac{my}{x} + \frac{bbzx}{aay}$ et

$kl = \frac{my}{x} - \frac{bbsx}{aay}$. mais $\overline{cb}^2 : \overline{cD}^2$

$:: ax \times bx : \overline{xg}^2$. ou $aa : bb :: aa - mm$

$+ 2mz - zz : \frac{mmyy}{xx} + \frac{2bbmz}{aa} + \frac{b^4z^2x^2}{a^4y^2}$.

donc $\frac{aa\,mmyy}{xx} + 2bbmz + \frac{b^4z^2x^2}{aayy}$

$= aabb - bbmm + 2bbmz - bbzz$.

qui est la 1re equat. A. de meme $\overline{cb}^2 : \overline{cD}^2 :: aK \times bl : \overline{kl}^2$

ou $aa : bb :: aa - mm - 2ms - ss : \frac{mmyy}{xx}$

$- \frac{2bbms}{aa} + \frac{b^4s^2x^2}{a^4y^2}$. donc $\frac{a^2m^2y^2}{xx}$

$- 2bbms + \frac{b^4s^2x^2}{a^2y^2} = a^2b^2 - b^2m^2$

$-2bbms - bbss$. 2e Equation B.

~~2e equat. B.~~ otant la 2e. de la 1re. le 1er. membre du 1er. et le 2e. du 2e il restera $2bbmz + 2bbms + \frac{b^4z^2x^2}{a^2y^2} - \frac{b^4s^2x^2}{a^2y} = 2bbmz + 2bbms - bbzz + bbss$. 3e. Equation. D.

Effaçant les termes qui se détruisent il restera $\frac{b^4z^2x^2}{a^2y^2} - \frac{b^4s^2x^2}{a^2y^2} = -bbzz + bbss$.

Divisant ce reste par bb, et Xant le quotient par $aayy$, il viendra $b^2z^2x^2 - b^2s^2x^2 = a^2y^2z^2 + a^2s^2y^2$ egalant a zero, on aura $bbz^2x^2 - b^2s^2x^2 + a^2y^2z^2 - a^2s^2y^2 = 0$. divisant par $bbxx + aayy$, le quotient sera $zz - ss = 0$ ou $zz = ss$. et par extraction de racine $z = s$. c'est à dire $or = no$. donc $go = ol$.

184 Remarque. La position de la corde gl peut changer et faire differens cas.

1°. Elle peut ne couper aucun des axes. 2°. Elle peut couper le petit axe à son sommet, sans couper le grand. 3°. Elle peut couper les 2 axes en deçà du centre ou au-delà par raport au point M, ou les couper à leur sommet; mais toutes ces 3 peuvent changer au plus les expressions des lignes ax, Bx, aK, BK, xg, et KL, et lon trouvera toujours $z = s$, ainsy la proposition est généralement vraye.

185. Quand 2 diametres Mu, fS sont posés de manière que l'un des 2, fS, est paralelle à la tangeante Mt menée par ~~lext~~ le sommet M de l'autre Mu, ils sont nommés <u>diametres conjugués</u>, par cequils font les fonctions semblables.

Les droites lo, go, paralelles a la tangeante au sommet du diametre, sont les ordonnées, ou apliquées au diamètre MV.

Coroll. 1er.

186. Il est evident que les doubles ordonnées a un diametre quelconque sont coupées en 2 egalemt. par le meme diametre.

Cor. 2e.

187. La position des diamètres Conjugués est determinée par la position de la tangeante menée par l'une de leurs extremités.

Cor. 3e. fig. 36.

188 Une corde gp coupée en 2 egalemt. par un diametre fm est paralelle a la tangeante Mh au sommet de ce diametre. Car si gp n'est pas paralelle à la tangeante on peut donc par le point g mener paralellement a la tangeante Mh

une droite gz qui tombant au dessus ou audessous de gp sera coupée en 2 egalemt. en r par le diametre (183). donc on aura gr = zr, mais gs = sp (sup) donc gr : gs :: zr : ps. donc la corde pz sera parallelle à rs ou fm. donc les ordonnées ps, zr au diametre fm seront égales, puisque les parallelles entre paralleles sont égales; donc on aura des ordonnées egales à differentes distances du centre, cequi est absurde. Donc la corde gp est parallelle à la tangeante

Corollaire. 4e. fig. 40.

189 Une droite pn qui coupe en 2 egalemt. 2 cordes parallelles, est un diametre, ou passe nécessairemt. par le centre.

Demonstration.

Du Centre O par le milieu u de la Corde gf Soit tiré le diametre cD; La corde gf Sera une ordonnée au diametre cD (186). or rs étant supposé paralelle à gf, Sera aussy une ordonnée au diametre cD et coupée en 2 egalem.t; donc le diametre qui passe par le milieu de gf passera aussy par le milieu de rs. donc il ne diferera pas de la droite pm, qui passe par le milieu des memes cordes, puisqu'il a 2 points communs avec elle. Donc une droite qui coupe 2 cordes paralelles en 2 égalemts est un diametre.

Cor. 5e, fig. 40.

190. Si par le Sommet d'un diametre, on mene une droite CL paralelle a une

double ordonnée elle sera tangeante au sommet C. Car si elle n'est pas tangeante soit menée par le point C une tangeante CL qui tombera au dessus ou au dessous de CE. Or rs étant coupé en 2 également par le diametre CD, sera parallelle à la tangeante CL (188), et reciproquement. CL sera parallelle à rs. Mais CE est parallelle à la même corde rs par (sup.) : donc on a par le même point C 2 paralleles CE, CL a une meme droite rs, ce qui est impossible. Donc une droite menée par le sommet d'un diametre parallement a une ordonnée a ce diametre est tangeante en ce point.

Theo. 8e. 37e. f.

191 Si des extremités m, g de 2 diametres conjugués, on mene à un autre diametre quelconque

ca, qui passe entre les 2 ... les ordonnées pm, gl, on aura $\overline{cl}^2 = \overline{ca}^2 - \overline{cp}^2$, et $\overline{cp}^2 = \overline{ca}^2 - \overline{cl}^2$.

Demonstration.

Soit $ac = a$. $cl = ci = b$. $cp = x$. $cl = z$. Soit menée la tangeante Dm. les 4 semblables Dpm, cgl donnent $\overline{pD}^2 : \overline{cl}^2 :: \overline{mp}^2 : \overline{gl}^2$. or $\overline{mp}^2 : \overline{gl}^2 :: ap \times bp : al \times bl$. donc $\overline{pD}^2 : \overline{cl}^2 :: ap \times bp : al \times bl$: et analytiquement $\frac{\overline{aa - xx}^2}{xx} : zz :: aa - xx : aa - zz$.

multipliant le 1er raport par xx, et divisant les antecedens par $aa - xx$, on aura

$aa - xx : zzxx :: 1 : aa - zz$.

donc $zzxx = a^4 - a^2x^2 - a^2z^2 + z^2x^2$. donc effaçant ce qui se détruit transposant et divisant tout par aa, il vient $aa - xx = zz$,

ou $xx = aa - zz$. donc &c.

Cor. 1er fig 37e et 38e.

192. Si dans l'équation $xx = aa - zz$, on fait $x = z$, ou $cp = cL$, les points pL se confonderont en un seul point S; les 2 diamètres conjugués mf, gh seront égaux et l'équation $xx = aa - zz$ sera $xx = aa - xx$, donc $2xx = aa$, ou $xx = \frac{aa}{2} = a \times \frac{a}{2}$. D'où l'on tire $a : x :: x : \frac{a}{2}$. Ce qui fait voir que quand les diamètres conjugués sont égaux, l'abcisse $cp = x$ correspondante à l'ordonnée abaissée de l'extrémité de l'un de ses diamètres sur le grand axe est moyenne proportionnelle entre le $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{4}$ du grand axe.

Cor. 2e. fig. 37.

193 Réciproquement si on fait cp $= x$ moyenne proportionnelle entre la $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{4}$ du grand axe, les 2 diamètres conjugués mf, gh seront égaux. Car $zz = aa - xx$ (191) : or $a : x :: x : \frac{a}{2}$ (sup) : donc $xx = \frac{aa}{2}$. Donc on aura $zz = aa - \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2}$ $= xx = \overline{cp}^2$. Donc $\overline{cl}^2 = \overline{cp}^2$. ou $cl = cp$. Ainsi les points p, l se confondront : ainsi on aura $cm = cg$, ou $mf = gh$.

Cor. 3e. fig. 38.

194. Il sera donc facile de déterminer les diamètres conjugués égaux.

1°. Il faut se servir du grand axe, chercher une moyenne proportionnelle cs entre ca et sa

moitié : par le point o, menés la perpend. m q qui rencontre l'ellipse aux points m, q : par les points m, q et par le centre c tirés les diamètres conjugués m f, g h, ils seront égaux. (193).

~~20.~~ 2° p. se servir du petit axe D E, prenés c n la moyenne proportionelle entre c D et sa $\frac{1}{2}$ par le point n menés la perpend. n h qui rencontre l'ellipse aux points n, h. par les points n h et par le centre c tirés les diamètres conjugués m r, g h, ils seront égaux.

Démons. de la 2.e Partie.

Du point m, abaissés l'ordonnée m p, on aura m p = c n,

et $\overline{mp}^2 = \overline{cn}^2$. or $b : cn :: cn : \frac{b}{2}$.
par (cons) donc $\overline{cn}^2 = \frac{bb}{2}$. donc
$\overline{pn}^2 = \frac{bb}{2}$. mais $\overline{pn}^2 : ap \times pb$
$:: \overline{cd}^2 : \overline{cb}^2$ (123) cest a dire
$\frac{bb}{2} : aa - xx :: bb : aa$. donc
$aa \times \frac{bb}{2} = aa - xx \times bb$.
divisant par bb, on aura
$\frac{aa}{2} = aa - xx$, et $xx = aa$
$- \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2} = a \times \frac{a}{2}$
dou lon tire $a : x :: x : \frac{a}{2}$. ce
qui fait voir que labscisse cp
$= x$ est moyenne proportionelle
entre la $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{4}$ du grand
axe: or quand cela arrive
lordonnée pn determine les
2 diametres conjugués egaux,
(193). ~~ce~~

Cor

195. Il ne peut y avoir que 2
diametres conjugués qui soient
égaux, car il ne peut y avoir

quième abscisse moyenne proportionelle
entre la $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{4}$ du grand axe.
Il est ~~est~~ vray qu'on peut prendre
sur le grand axe 2 points l'un
vers A et l'autre vers B, où
l'on aura une abscisse moyenne
proportionelle entre la $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{4}$ du
grand axe : mais comme les
ordonnées menées par ces 2
points determinent les memes
diametres, (180), il s'en suit qu'il
ne peut y avoir que 2 diametres
conjugués qui soient egaux. —

Cor. 8e. fig 37

196 puisque (191) $ap \times Bp$, ou
$\overline{cl}^2 : \overline{pm}^2 :: \overline{cB}^2 : \overline{cD}^2$, (124) : et
$al \times Bl$, ou $\overline{cp}^2 : \overline{gl}^2 :: \overline{cB}^2 : \overline{cD}^2$,
l'on a $\overline{cl}^2 : \overline{pm}^2 :: \overline{cp}^2 : \overline{gl}^2$.
donc $cl : pm :: cp : gl$. donc les
$\triangle$ cpm, cgl sont egaux. —

Theo. 9e. fig. 39.

197. ~~Le quarré~~ $\overline{DO}^2$ $\overline{LO}^2$ d'un ordonnée Lo a un diametre quelconque est au restangle DD − uu, ou $\overline{cm}^2 - \overline{co}^2$ des absisses corresp., comme $\overline{cS}^2$ du demi diametre conjugué cS est ~~au~~ $\overline{cm}^2$ du ½ diametre cm sur le quel on prend les absisses.

Démonstration.

Soit ac, ou cB = a, cD ou cL = s. cp = x, pm = y, Or ou no = z, cq = m cu ou cm = D. fc ou cS = f. co = u. Lo ou qo = s il faut prouver que SS : DD − uu :: ff : DD.

1° Les Δ semblables mcp, ocq, donnent cm : cp :: co : cq. ou D : x :: u : m. donc Dm = ux. Les Δ semblables cSi, lon, donnent $\overline{cS}^2 : \overline{ci}^2 :: \overline{lo}^2 : \overline{on}^2$. ou ff : aa − xx :: SS : zz. donc ff zz = aa ss − s²x².

2° Si après avoir mis z a la place de cS, l'on ajoute les 2 équations a et B du Théoreme 7e. Le 1er membre au 1er et le 2e au 2e, on aura celle cy

Autre démonstration.

Soient ac, ou cb = a
cd, ou ce = b
cp = … = $x = \sqrt{aa-zz}$ (191)
mp … = y
cm, ou cu = d
cf, ou cs = f
co … = u
lo … = s
ci … = $z = \sqrt{aa-xx}$ (191)
is … = $\frac{bx}{a}$: car $\overline{is}^2 = (aa-zz) \times \frac{bb}{aa}$: mais aa − zz = xx (191) donc (par subst.) $\overline{is}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$ et $is = \frac{bx}{a}$

$mp = y = \frac{bz}{a}$: car $yy = (aa-xx) \times \frac{bb}{aa}$. donc (subst.) $yy = \frac{b^2z^2}{a^2}$ et $y = \frac{bz}{a}$.

Cela posé les Δ semblables cmp, coq donnent cm : pm :: co : oq
ou $d : \frac{bz}{a} :: u : oq = \frac{buz}{ad}$

cm : cp :: co : cq
ou $d : x :: u : cq = \frac{ux}{d}$.

Les Δ semblables cis, onl donnent
cs : ci :: ol : on
ou f : z :: s : $on = \frac{sz}{f}$

et $cs : si :: ol : nl$
ou $f : \frac{bx}{a} :: s : nl = \frac{bsx}{af}$.
Donc $ck = on + cq = \frac{sz}{f} + \frac{ux}{d}$
$= \frac{dsz + fux}{df}$

et $lk = nk - nl = oq - nl$
$= \frac{buz}{ad} - \frac{bsx}{af}$
$= \frac{abfuz - abdsx}{a^2df}$.
or $lk = (\overline{ca}^2 - \overline{ck}^2) \times \frac{\overline{ce}^2}{\overline{ca}^2}$ (123)
ou $\frac{b^2f^2u^2z^2 - 2b^2dfsuxz + b^2d^2s^2x^2}{a^2d^2f^2}$
$= \frac{a^2b^2f^2d^2 - b^2d^2s^2x^2 - 2b^2dfsuxz + b^2f^2u^2x^2}{a^2d^2f^2}$.

et en réduisant, et divisant ensuite par a^2, il vient $\frac{b^2u^2z^2}{d^2} + \frac{b^2s^2x^2}{f^2} = a^2b^2 - \frac{b^2s^2z^2}{f^2} - \frac{b^2u^2x^2}{d^2}$. Substituant à xx sa valeur $aa - zz$ (191), et réduisant, on a $\frac{a^2b^2s^2}{f^2} = a^2b^2 - \frac{a^2b^2u^2}{d^2}$, ou $\frac{s^2}{f^2} = 1 - \frac{u^2}{d^2}$, ou $s^2 = f^2 - \frac{f^2u^2}{d^2}$, ou enfin $s^2 = (d^2 - u^2)\frac{f^2}{d^2}$.

D'où on tire $s^2 : d^2 - u^2 :: f^2 : d^2$
c'est-à-dire, $\overline{to}^2 : \overline{cm}^2 - \overline{co}^2 :: \overline{cf}^2 : \overline{cm}^2$.

Donc &c.

Corollaire.

Si au lieu de la demi-ordonnée lo, on prend l'autre og; que l'on fasse $og = s'$ et que l'on conserve toutes les autres dénominations précédentes;

$$\frac{2aammyy}{xx} + \frac{2b^4z^2x^2}{a^2y^2} = 2aabb - 2bbmm - 2bbzz,$$ et divisant par 2, on aura $$\frac{aammyy}{xx} + \frac{b^4z^2x^2}{a^2y^2} = aabb - bbmm - bbzz.$$ or $$aa - xx = \frac{aayy}{bb}$$ (126) .. donc $aabb - bbxx = aayy$. mettant donc dans le numerateur du 1.er terme et dans le dénominateur du 2.e yy, sa valeur $aabb - bbxx$, il viendra $$\frac{aabbmm - bbmmxx}{xx} + \frac{b^4z^2x^2}{aabb - bbxx} = aabb - bbmm - bbzz,$$ et par réduction $$\frac{aamm}{xx} + \frac{zzxx}{aa - xx} = aa - zz.$$ mettant encore p.r mm sa valeur $\frac{uuxx}{DD}$ et p.r zz sa valeur $\frac{a^2s^2 - s^2x^2}{ff}$, il viendra,

$$\frac{a^2u^2}{DD} + \frac{s^2x^2}{ff} = aa - \frac{a^2s^2 - s^2x^2}{ff}.$$ et

on trouvera, par des combinaisons semblables,

$or = \frac{s'z}{f}$

$gr = \frac{bs'x}{af}$. Donc $ex = or - cq = \frac{s'z}{f} - \frac{ux}{d}$

$gx = gr + oq = \frac{bs'x}{af} + \frac{buz}{ad}$

Ensuite $\overline{gx}^2 = (\overline{ca}^2 - \overline{cx}^2) \times \frac{\overline{ca}^2}{\overline{ca}^2}$, c'est-à-dire,

(en faisant les mêmes calculs que dans l'article précéd.)

$s'^2 = (d^2 - u^2)\frac{f^2}{d^2}$: or nous avons trouvé

$s = (d^2 - u^2)\frac{f^2}{d^2}$: donc $s' = s$, ou $lo = go$.

Donc les doubles ordonnées à un diamètre quelconque sont ~~égales~~ coupées en 2 également par ce diamètre.

par réduction $\frac{a^2u^2}{DD} = aa - \frac{a^2 s^2}{ff}$.

et par multiplication $a^2u^2 = a^2D^2 - \frac{a^2D^2s^2}{ff}$,

et par division $u^2 = D^2 - \frac{D^2s^2}{ff}$,

et par transposition $\frac{D^2s^2}{ff} = DD - uu$.

Donc l'on tire $ss : DD - uu :: ff : DD$.

Prop: 1re.

198. Si l'on mène gq parallelle à uu on aura encore $\overline{gq}^2 : fq \times q\delta :: \overline{m u}$: $\overline{fs}^2$, ou $:: \overline{cm}^2 : \overline{cs}^2$

Démonstration.

Soit encore cm ou $cu = D$. cf ou $cs = f$. co ou $gq = u$. og ou $cq = s$, fq sera $f - s$, et $q\delta = f + s$

il faut prouver que $uu : ff - ss :: DD : ff$. en reprenant l'équation $DD - uu = \frac{DD\,ss}{ff}$, la multipliant par ff, transposant, et divisant par DD, on aura $ff - ss = \frac{ff\,uu}{DD}$. D'où l'on tire

mu : ff-ss :: DD : ff. donc &c.

Cor. 2e

197 1°. On trouve donc les mêmes propriétés, soit qu'on prenne les ordonnées au diametre mu, soit qu'on prenne les ordonnées au diametre fs. C'est pourquoi les 2 diametres mu, fs sont apellés conjug. puisqu'ils font semblables fonctions

2°. Les propriétés des ~~dia~~ ordonnées aux diametres sont précisemt les mêmes que celles des ordonnées aux axes : il n'y a de différence que qu'en ce que les ordonnées aux axes leurs sont perpendiculaires au lieu que les ordonnées aux diamètres leurs sont obliques.

Demême les équations

$DD - uu = \frac{DDss}{ff}$, et $ff - ss$

$= \frac{ffuu}{DD}$ aux diametres sont

les mêmes que les équations

aux axes; elles expriment

également la nature de

l'élipse et toutes les

propriétés que l'on a

déduites des équations aux

axes doivent se déduire

des équations aux diamétres.

Cor. 12e fig. 41

200. Il faut donc conclure,

1°. que les quarrés des ordonnées

a un diametre sont entre

eux comme les rectangles des

abscisses.

2°. que les abscisses d'un

diamètre diminuant, les

ordonnées augmentent,

et que les abscisses augmentant,

les ordonnées diminuent.

3°. que p.r mener une tangeante Lg a un point L d'une Ellipse, dont on a 2 diamètres conjugués, c B, c b, il faut suivre la metode que l'on a donnée p.r mener une tangeante par le moyen des axes. Car on peut regarder une Ellipse raportée a ses diamètres comme formée d'une autre Ellipse qui auroit eu les memes diamètres p.r axes en sorte que l'un de ces axes et toutes les ordonnées qui luy sont paralleles le seroient egalent. inclinées sur l'autre axe et d'un meme côté p.r former l'Ellipse dont on auroit les 2 diamètres conjugués. Donc quelque

soit l'inclinaison des ordonnées sur la ligne des absisses, la tangeante rencontrera toujours cette meme ligne des absisses a la meme distance du centre.

201. De là designant toujours l'absisse CP prise du centre par x, l'expression de la soustangeante Pq sera $\frac{aa-xx}{x}$. De même celle de la partie du diametre comprise entre le centre et la rencontre de la tangeante sera $\frac{aa}{x}$, ou en mots toutes les lignes dont la determination ne depend point de la consideration des angles auront les memes expressions tant sur les diametres

que p.r les axes.

202. D'ou il suit que l'expression de la normale, de la soustnormale, et de la tangente ne sera pas la même p.r les diametres et p.r les axes, car on a eu egard p.r cela à l'angle droit que les ordonnées font avec les axes.

203. Si l'on fait $2D:2f::2f:p$, la ligne p sera le paramètre du diamètre MH.

Cor. 1.r

204 La supposition $2D:2f::2f:p$ donne $4DD:4ff::2D:p$; ou $DD:ff::2D:p$. donc si dans l'équation au diamètre $DD-uu=\frac{DDss}{ff}$, on met p.r le raport $DD:ff$ son égal $2D:p$, on aura $DD-uu=\frac{2Dss}{p}$ qui est l'équation au parametre du diamètre. D'où on tire $DD-uu:ss::2D:p$

comme on l'a démontré par
raport a l'axe. (135)

205. Si on fait $2f : 2D :: 2D : T$
La ligne T sera paramètre du
diamètre fs.

Cor. 2e

206 La proportion $2f : 2D :: 2D : T$, donne
$4ff : 4DD :: 2f : T$. donc on
aura l'equation au paramètre
du diamètre conjugué fs
sçavoir $ff - ss = \frac{2fuu}{T}$, d'ou
l'on tire : $uu : ff - ss :: T : 2f$
comme on l'a démontré
(145) par raport au 2e axe.

Cor. 3e

207. Il est clair (204) que le
rectangle de l'un des diamètres
conjugués par son paramètre
est égal au quarré
de l'autre diamètre.

Cor. 4e fig. 39

208. Si Mu, fs sont 2 diametres

conjugués égaux, δ sera égal à f, ainsy l'équation $DD - uu = \frac{DD\delta\delta}{ff}$ deviendra $DD - uu = \delta\delta$. Ce qui signifie que $MO \times Ou = \overline{OL}^2$. Et cette équation est la même que celle du cercle, quoique dans l'ellipse les ordonnées sont toujours obliques aux diamètres, et dans le cercle toujours perpend. Donc pr qu'une courbe soit un cercle, il ne suffit pas que les quarrés des ordonnées soient égaux aux produits de leurs abscisses, il faut de plus que les ordonnées fassent un angle droit avec leurs diamètres

Theo. 10e. fig. 37

209 La somme des quarrés de 2 diamètres conjugués

quelconques fm, gh, est égale à la somme des quarrés des 2 axes. —

Demonstration.

on a vu (191) que $\overline{cl}^2 = \overline{ap}^2 \times \overline{bp}^2 = aa - xx$ et que $al \times bl = \overline{cp}^2 = xx$. or $\overline{ca}^2 : \overline{ce}^2 :: al \times bl : \overline{lg}^2$; ou $aa : bb :: xx : \frac{bbxx}{aa} = \overline{lg}^2$. —

et $\overline{ca}^2 : \overline{ce}^2 :: ap \times bp : \overline{mp}^2$, ou $aa : bb :: aa - xx : bb - \frac{bbxx}{aa} = \overline{mp}^2$. mais dans les Δ rectangles cpm, clg, $\overline{cm}^2 = \overline{cp}^2 + \overline{pm}^2$. donc $\overline{cm}^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$; et $\overline{cg}^2 = \overline{lc}^2 + \overline{lg}^2$. donc $\overline{cg}^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$. donc $\overline{cm}^2 + \overline{cg}^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa} + aa - xx + \frac{bbxx}{aa} = bb + aa = \overline{ce}^2 + \overline{ca}^2$. donc &c.

Theo. III. fig. 37

200. Si de l'extrémité m d'un diamètre quelconque cm, on abaisse sur son conjugué la perpend. mK, on a cette proportion

mr : ce :: ca : cg.

Démonstration.

$\overline{cg}^2 + \overline{cm}^2 = bb + aa$. (209) or $\overline{cm}^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$. donc $\overline{cg}^2 = b^2 + a^2 - \overline{cm}^2$,

ou $\overline{cg}^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa} = \frac{bbxx}{aa} \frac{-a^2x^2 + a^4}{aa}$. Du centre c soit abaissée sur la tangente la perpend. cK. Les* Δ semblables Mpd, cKd donnent md : mp :: cd : cK. Mais on a trouvé (170) $md = \frac{\sqrt{aa - xx}}{aa} \times \frac{\sqrt{bbxx - a^2x^2 + a^4}}{xx}$ et $cd = \frac{aa}{x}$. (168). donc en mettant les valeurs algebriques on aura $\frac{\sqrt{aa - xx}}{aa} \times \frac{\sqrt{bbxx - a^2x^2 + a^4}}{xx}$

Autrement.

$\overline{Tg}^2 = (aa - zz)\frac{bb}{aa} = xx \times \frac{bb}{aa}$ (191), et $\overline{cg}^2 = \overline{cT}^2 + \overline{Tg}^2 = zz + \frac{bbxx}{aa} = aa - xx + \frac{b^2x^2}{aa}$. Du centre c soit abaissée sur la tangeante md la perpendiculaire cK; les Δ semblables dcK, cTg donnent $\overline{cg}^2 : \overline{Tg}^2 :: \overline{cd}^2 : \overline{cK}^2$, c'est-à-dire $a^2 - x^2 + \frac{bbxx}{aa} : \frac{bbxx}{aa} :: \frac{a^4}{xx}$ (168) : $\overline{cK}^2$ —

donc $\overline{cK}^2 = \frac{a^4b^2x^2}{a^2x} \times \frac{a^2}{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}$

$= \frac{a^4b^2}{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}$. Donc $\overline{cK}^2$ ou $\overline{mr}^2 \times \overline{cg}^2$

$= \frac{a^4b^2\ (a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}{a^2\ (a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)} = a^2b^2 = \overline{ca}^2 + \overline{ce}^2$.

Donc $\overline{mr}^2 : \overline{ce}^2 :: \overline{ca}^2 : \overline{cg}^2$, ou bien mr : ce :: ca : cg.

$: \frac{b\sqrt{aa-xx}}{aa} :: \frac{aa}{x} : ck = \frac{aab}{\sqrt{bbxx-a^2x^2+a^4}}$.

donc $\overline{ck}^2 = \overline{mr}^2 = \frac{a^4bb}{bbxx-a^2x^2+a^4}$.

donc $\overline{mr}^2 \times \overline{cg}^2 = aabb = \overline{ca}^2 \times \overline{ce}^2$. donc $\overline{mr}^2 : \overline{ce}^2 :: \overline{ca}^2 : \overline{cg}^2$, ou $mr : ce :: ca : cg$. donc &c.

Cor.

211. Donc le parallégrame formé sur les $\frac{1}{2}$ diamètre conjugués cm, cg est égal au rectangle formé sur les $\frac{1}{2}$ axes, ca, ce. car l'un est mesuré par $cg \times mr$ et l'autre par $ca \times ce$. Donc le parallgrame formé autour de 2 diamètres conjugués quelconques est égal au rectangle formé autour des axes; ainsi tous les parallgrames circonscrits à une meme ellipse, et formés sur 2 diamètres conjugués dont

égaux entre eux. —

Theo. 12e, fig. 42

212. Ayant décrit un cercle sur un des axes d'une Ellipse donnée, si par les mêmes points de l'axe commun on élève des ordonnées au cercle et à l'Ellipse, les ordonnées à l'Ellipse seront p[ro]p[orti]onelles aux ordonnées du cercle. —

Démonstration.

1° $\overline{qm}^2 : \overline{lm}^2 :: an \times bn : am \times bm$. (123). or $an \times bn = \overline{pn}^2$. et $am \times bm = \overline{gm}^2$. donc $\overline{qn}^2 : \overline{lm}^2 :: \overline{pn}^2 : \overline{gm}^2$. donc $qn : lm :: pn : gm$. —

2°. $\overline{pn}^2 : \overline{pm}^2 :: Ep \times Dp : ep \times dp$. or $Ep \times Dp = \overline{ph}^2$. et $Dp \times ep = \overline{pq}^2$ donc $\overline{pn}^2 : \overline{pm}^2 :: \overline{ph}^2 : \overline{pq}^2$. donc $pn : pm :: ph : pq$. Donc &c

Cor. 1er

213. Chaque ordonnée de l'Ellipse est à l'ordonnée correspondante du

cercle, comme le $\frac{1}{2}$ axe qui n'est pas commun est au $\frac{1}{2}$ axe commun. car $\overline{lm}^2 : am \times bm :: \overline{ce}^2 : \overline{ca}^2$ (123). or $am \times bm = \overline{gm}^2$. donc $\overline{lm}^2 : \overline{gm}^2 :: \overline{ce}^2 : \overline{ca}^2$ donc $lm : gm :: ce : ca$. de même $\overline{pn}^2 : ep \times Dp :: \overline{ca}^2 : \overline{ce}^2$. (139); or $ep \times Dp = \overline{ph}^2$ donc $\overline{pn}^2 : \overline{ph}^2 :: \overline{ca}^2 : \overline{ce}^2$. donc $pn : ph :: ca : ce$. —

Cor. 2e.

214\. on peut donc regarder l'ellipse comme un cercle dont toutes les ordonnées ont été alongées, ou racourcies proportionnellement dans un rapport constant. quand l'axe commun au cercle et à l'ellipse est le grand axe de l'ellipse, cette courbe a été formée par les ordonnées du cercle racourcies dans le rapport du $\frac{1}{2}$ petit axe au $\frac{1}{2}$ grand

axe. Au contraire grand
l'axe commun au ~~[illegible]~~ cercle
et à l'élipse est le petit
axe de l'ellipse, cette courbe
a été formée par les
ordonnées du cercle augmentées
dans le rapport du ~~petit~~ grand
axe au ~~grand~~ petit axe.

Corr. 3e. fig. 42

215. La surface de l'ellipse est
à celle d'un cercle décrit sur
son grand, ou son petit
axe, comme le petit axe
est au grand axe, ou
comme le grand axe est
au petit.

Démonstration.

1°, Concevez l'ellipse adbea
et le cercle afbha comme
étant formés toutes deux d'une
infinité d'ordonnées parallèles

entre elles et perpend. à l'axe commun : le nombre des élemens sera le même de part et d'autre, puisqu'il est mesuré par le même axe commun ; et de plus chaque élement qm de l'ellipse, est à son correspondant dans le cercle, comme CD est à ca. donc la somme des élements d'une part, ou la surface de l'ellipse, est à la somme des élemens de l'autre, ou à la surface du cercle, comme CD : ca.

2°. on fera voir de même que la surface de l'ellipse est à celle d'un cercle décrit sur son petit axe, comme le grand axe est au petit

Corol. 4°. fig. 42

216 La surface de l'ellipse est égale à l'aire d'un cercle dont le rayon seroit moyen

géom. entre les 2 demi-axes.

Démonstration :

Soit S la surface du cercle décrit sur ca : p celle de l'ellipse, cl le rayon moyen géométrique entre ca et ce, $S:p::ca:ce$ (215) Mais $ca:cl::cl:ce$, par (sup). Donc $\overline{ca}^2::\overline{cl}^2::ca:ce$. Or prenant les cercles faits sur ces lignes comme rayons, et les désignant par cercle ca, et cercle cl, on aura $\overline{ca}^2:\overline{cl}^2::$ le cercl. ca : cercl. cl. Donc on aura $S:p::$ cercl. ca : cercl. cl. mais $S=$ cercl ca (hyp). Donc aussy $p=$ cercl. cl. donc &c —

Cor. 5e

217\. Donc la surface de l'ellipse est très-à-peu-près égale à $\frac{22}{7}$ du rectangle de ses $\frac{1}{2}$ axes, ou du parallélogramme formé sur 2 $\frac{1}{2}$ diamètres conjugués. Car la

Surface d'un cercle est à peu près égale a $\frac{22}{7}$ du quarré du rayon.

~~donc $\frac{22}{7}\overline{ca}^2$: s :: $ca : ce$~~

donc on aura $s = \frac{22}{7}\overline{ca}^2$.

mais $s : sp :: ca : ce$. donc $\frac{22}{7}\overline{ca}^2$: sp :: $ca : ce$ dou l'on tire

$sp = \frac{22}{7} ca \times ce$. si l'on veut une plus grande exactitude dans la determination de la surface de l'ellipse, il faudra employer un raport de la $\frac{1}{2}$ circonference au rayon plus exact que celuy de 22 a 7. en se servant du raport de 355 a 113, on aura $sp = \frac{355}{113} ca \times ce$

Corol. 6.e

218. Les surfaces de 2 ellipses sont entre elles comme les produits de leurs axes.

Demonstration.

Soit E la surface de la 1.re ellipse e la surface de la 2.e

Autrement

Soient E la surface de la 1.re ellipse, A et B ses deux axes. e la surface de la 2.e ellipse, a et b ses deux axes.

on a (217) $E = \frac{22}{7} AB$ et
$e = \frac{22}{7} ab$
donc $E : e :: \frac{22}{7} AB : \frac{22}{7} ab$
et $E : e :: AB : ab$. Donc &c. —

Soient a, b ~~les lignes~~ les axes de la pre fig les axes de la 2e; il faut demontrer que $E : e :: a \times b :: f \times g$. à la place des ellipses prenez les cercles qui leurs sont egaux, c'est a dire les cercles dont les diametres sont moyens geometriques l'un entre a et b, l'autre entre f et g. soit donc E l'aire du 1er cercle, m son diametre e l'aire du 2e cercle D son diametre cela posé $a : m :: m : b$. $f : D :: D : g$. donc $m^2 = a \times b$. $D^2 = f \times g$. donc $m^2 : D^2 :: a \times b : f \times g$. or $m^2 : D^2 :: E : e$. donc $E : e :: a \times b : f \times g$. donc &c.

219. Un Ellipsoide est un corps engendré par la revolution d'une demie ellipse aDb autour de l'un de ses axes ab. Dans la revolution de la $\frac{1}{2}$ ellipse

autour de l'axe AB, toutes les ordonnées OP, RS, CD qui sont les élémens du plan de l'ellipse, décrivent autant de cercles qui tous ensemble composent l'ellipsoïde; comme si un $\frac{1}{2}$ cercle fait une révolution autour de son axe AB, les ordonnées OQ, CE, RT décrivent des cercles qui composent ensemble la sphère.

Théor. 13e fig. 43

220 La solidité d'une ellipsoïde est égale au produit du cercle qui a p^r rayon le $\frac{1}{2}$ petit axe CD par les $\frac{2}{3}$ du grand axe AB.

Demonstration.

Les ordonnées OP, RS, CD de l'ellipse sont p^{nelles} aux ordonnées OQ, RT, CE correspondantes du cercle (212). donc les quarrés des ordonnées de l'ellipse sont aussy entre eux comme les quarrés

des ordonnées du cercle, Or si
au lieu des quarrés des ordonnées
on prend les surfaces des cercles
dont les ordonnées sont les rayons,
puisque les cercles sont entre
eux comme les quarrés de
leurs rayons, tous les cercles
qui composent l'ellipsoïde
sont entre eux comme les
cercles qui composent la sphere.
Mais la valeur des cercles qui
composent la sphere, ou la solidité
de la sphere est égale au produit du
cercle qui a pr. rayon la $\frac{1}{2}$ du
diametre par les $\frac{2}{3}$ de l'axe,
ou du diametre AB (517. géom.).
Donc aussi la solidité de l'ellipsoïde
est égale au produit du cercle
qui a pr. rayon la plus grande
ordonnée, ou la $\frac{1}{2}$ CD du
petit axe par les $\frac{2}{3}$ du
grand axe AB. Donc de

Prob. 7e ~~Theor 16e~~ fig. 44.

221 trouver un diametre quelconque le centre, les axes et les foyers d'une elipse donnée. —

Solution. —

1° tirés dans l'elipse donnée 2 Cordes quelconques a d, m p paralelles entre elles. par leurs points du milieu r, s tirés f g, ce sera un diamétre. (189). —

2° Divisés le Diametre f g en 2 egalemt. au point C, ce sera le Centre de l'elipse (180). —

3° Du Centre c Décrivés un arc de cercle qui coupe l'elipse en 2 points h, q tirés la Corde h q, divisés la en 2 egalemt. en t — par le point t et le centre C tirés la ligne a b, ce sera un des axes. car la Corde h q etant coupée en 2 egalemt par a b qui passe par le centre de son arc, cette

corde est ordonnée au diamétre AB. (183) mais comme elle est perpend. au diam AB (const) il s'en suit que AB est un des axes; car il n'y a que les axes dont les ordonnées sont perpend. ——

4°. Sur le milieu de AB élevez la perpend. DCE. elle sera l'autre axe. Si AB est plus grand que DE AB sera le grand axe et DE le petit. au contraire DE sera le grand axe et AB le petit si DE est plus grand que AB.

5°. Les 2 axes étant determinées on trouvera les foyers (148)

Problème 6°. fig. 45.

??? trouver la position des ordonnées a un diametre donné fg, tirer une tangente

a Lune ou Lautre de ses
Extremités et trouver son
diamètre conjugué.

Solution

1°. Sur Le diametre de Lelipse
prenés un point quelconque M
diferent des points f, g. du
point M par Lextremité f du
diametre menés la corde Mf,
et prolongés la en sorte que
fe = fm du point e tirés
ep paralelle au diam fg, ensuite
menés la Corde Mp, elle sera
une double ordonnée au
diametre fg. car ep etant
paralelle a Mg par (const).
on aura mf : fe :: mr : rp
or mf = fe (cons). donc mr
= rp. donc la corde mp
est coupée en 2 egalemt par
Le diametre fg. donc elle
est une ordonnée a ce diametre.

(183). —

2°. par l'extremité g du diametre fg menez la droite st parallelle a l'ordonnée mp. elle sera tangeante a l'extremité g du diametre. (190.) —

3°. par le centre c menez une parallelle hb a l'ordonnée mp, ou a la tangeante st elle sera le diametre conjugué à fg. (185).

§.4. Des proprietés de l'hiperbole considerée sur un plan.

Fig. 46 223. Soit une droite AB divisée en 2 egalemt. en C, et soient pris sur la même ligne prolongée 2 points f, g a egale distance du point C: si on cherche une infinité de points m tels que la difference des lignes fm, gm menées, menée de chacun

des ces points f, g ~~ace~~ soit constamt. égale à la ligne a b, la courbe qui passera par cette suite de points sera une hiperbole.

Cor.

124 Donc l'hiperbole a necessairemt. 2 branches mam, m'bm. car il est evident qu'on peut trouver du coté de b une suite de points, M, M, M qui ~~est~~ ait la même proprieté que la suite de points trouvés vers a, ces 2 courbes qui se ~~trouv~~ presentent l'une à l'autre leurs convexité sont apellées hiperboles opposées.

125 La ligne a b donnée de grandeur et de position s'apelle 1r. axe des hiperboles opposées : les extremités a, b

de cette ligne sont les origines ;
ou les sommets de ces courbes.

Les points f g pris à égale distance des extrémités de l'axe sont les foyers. Le point c milieu de l'axe a b est le centre des 2 courbes. ——

Une droite indéfinie D c E menée par le centre c perpendt au premier axe a b est le 2e axe indéfini. Si sur cette ligne on prend de part et d'autre du centre c les parties c D, c E chacune moyenne proportionelle entre les distances d'un sommet a aux 2 foyers f g, cette ligne D E sera le 2e axe fini ou simplement le 2e axe des hyperboles.

Si d'un point quelconque

M de la courbe, on abaisse une perpend. mP à l'axe prolongé autant qu'il sera necessaire, cette ligne sera une ordonnée au 1r. axe : les parties Ap, Bp du même axe comprises entre ses extremités et le point p de rencontre de l'ordonnée sont les abscisses, ou coupées.

Une ordonnée et les abscisses Ap, Bp qui lui répondent sont appellés coordonnées.

Une ordonnée au 2d. axe est une droite mq menée d'un point de l'hiperbole perpend. au 2d axe : les parties Cq, Dq du 2d. axe comprises entre ses extremités et la rencontre de l'ordonnée sont les abscisses correspondantes.

Nous donnerons aussi le nom d'abscisses aux parties de chaque axe comprises entre le centre C et la rencontre de cet axe par son ordonnée.

D'où il suit que dans ce cas chaque ordonnée ne peut avoir qu'une abscisse et que les ordonnées d'une axe seront égaux aux abscisses de l'autre et réciproquement, comme il est évident à cause du parallelograme CPMQ.

Une 3.e proportionelle aux 2 axes sera le paramètre de celuy qui occupe le 1.er terme de la proportion.

Probleme. 1.er

226. Supposant la définition précédente décrire une hyperbole, ou les hyperboles opposées, ou trouver tant de points qu'on voudra de chacune de ces

Courbes. ——

Solution.

De l'un des foyers g, comme centre avec un rayon quelconque go plus grand que Ga, décrivés un arc de cercle indéfini mon. prenés ensuite sur l'axe vers C une partie an = af. du point f, comme centre, avec un rayon égal à no, décrivés un nouvel arc qui coupera le 1.er en 2 points déterminés M, m. Continués à trouver de cette manière une suite de points M, m, la courbe qui passera par les points MaM sera une hyperbole. ——

Démonstration.

Puisque an = af, on aura gn = aB, donc aussy go − no = ab.

par conséquent gm-fm sera aussy égal au 1.er axe aB, puisque les lignes gm, fm, sont égales (cons) aux lignes go, no; donc la courbe décrite est une hyperbole (123).

Cor. 1.er

227. Comme on peut prendre le rayon go si grand que l'on voudra, il suit de là que chacune des hyperboles est composée de 2 branches infinies qui s'éloignent continuellement de l'axe aB: ensuite il est évident que le point O, ne peut pas tomber entre le sommet a, et le centre C. car dans

ce car, les cercles
décrits des points g, f
comme centre, avec les
rayons Go, no ne pourroient
plus se couper ni meme se
toucher en aucun point.
Donc les lignes ga, na
sont les limites de
toutes les lignes go,
no. qui servent à
décrire chaque hyperbole:
les points a, B sont
parconsequent des points
de la courbe — —

Cor. 2e.

128- Il est évident que les
~~lignes~~ hyperboles opposées
sont égales et semblables
puisqu'elles ont été décrites

de la meme maniere,
et avec les mêmes Conditions.

Cor. 3e. fig. 47.

129. Si on fait aL=Bp et que l'on joigne les extremités l, f des ordonnées Correspondantes, Ll, fp par la ligne lf, elle sera paralelle à l'axe aB, et Coupée en 2 parties égales par le 2e. axe indeterminé gD. Car les droites aL, Bp étant égales (hyp), les ordonnées Ll, pf qui sont perpend. sur pL seront aussy égales, puisque les hyperboles opposées sont egalles et

semblables (228) donc ef est paralelle au 1er. axe aB. ~~donc ef = pL.~~

~~or pL est coupé en 2 parties égales~~

donc ef = pL; or pL est coupé en 2 egalemt. par le second axe gd, (cons). donc ef est aussy coupée en 2 egalemt par le 2e. prolongé, s'il en est besoin.

Cor. 4e.

230 ##X reciproquement toutte ligne Ef menée d'un point quelconque d'une hyperbole a son opposée paralemt. au 1er. axe aB est coupée en 2 egalemt. par le 2e. axe prolongé, s'il est besoin car soient tirées les ordonnées EL, pf, elles sont égales a cause des paralelles Ef, pL. donc aussy aL = Bp puisque les hyperboles opposées sont égales et semblables. or CL = Cp. donc Eh = fh. a cause du rectangle ELpf. ##X. 231

Cor. 5e

toutte ligne ef menée d'un point quelconque d'une hyperbole à son opposée et coupée en 2 egalemt. par le 2e. axe; est paralelle au 1er. car si ef n'est pas par parat. au 1er aB, on peut donc du point f, mener une paralelle fk au 1er axe. elle tombera

de l'un ou de l'autre coté de
Ef et sera coupée en 2 egalemt par
le 2d axe (230). ainsy fn=nk.
or eh=fh (supp). donc
eh : fh :: fn : nk. donc fk est
paralelle à hn : mais el est
paralelle a CD (cons), donc ek
est paral. à EL, cequi est absurde.
Donc &c.

Cor. 6e

232 Donc toutte ligne qui étant menée
d'un point quelconque d'une
hiperbole a son opposée
n'est pas paralelle a son 1r ax
ne peut etre coupée en 2
egalemens par le 2d. axe.
car si elle etoit coupée en 2
egalemt. par le 2d. axe, elle
seroit paralelle au
1er (230) ce qui est contre (supp).
Donc &c. Cor. 4e.

233. ~~Reciproquement toutte ligne Ef~~

menée d'un point quelconque d'une hyperbole a son opposée parallelemt. au 1r axe eB est coupée en 2 parties egales par le 2e axe prolongé s'il est besoin. car soient tirées les ordonnées el, pf elles sont egales àcause des paral. ef, pl. donc aussy al=Bp puisque les hyperboles opposées sont egales et semblables. or cl=c.pl donc ch=fh àcause du rectangle cl pf.

231. reciproquement toutte ligne &c.

&c.

Scolie;

233. Comme les paraleles au 1r. axe sont coupées en 2 egalemt. par le 2e. et que les paralelles au 2e. sont coupées aussy en 2 egalemt. par le 1r. c'est par cette raison que ces 2 axes sont apellés conjugués parcequ'ils font des fonctions semblables.

2e. on voit aussy pourquoy

l'on a apellé 2.d axe indeterminé la perpend. indefinie hg élevée sur le milieu du 1.r axe parcequ'elle coupe en 2 egalemt. toutes les lignes qui lui sont perpend. et qui sont terminées aux hyperboles opposées.

Cor.

234. on fera dans la suite le 1.r axe $AB = 2a$ le 2.d $DE = 2B$. CE ou $CD = B$. Cf, ou $Cg = c$. $Cp = x$. en regardant le centre comme l'origine des absisses et l'on aura $Bp = x + a$ et $ap = x - a$. les ordonnées $mp = y$. il est clair que les y expriment les absisses du 2.d axe, tandis que les x expriment les ordonnées au meme axe puisque $mp = Cq$ et que $Cp = mq$. —

235. Lorsque le 1.r axe est donné p.r déterminer le 2.d du point a ou B, comme centre avec un rayon egal a Cg ou Cf, décrivez de part et d'autre du centre un

axe qui coupera l'indefinie Bq en 2 points D E, la ligne D E sera le 2d. axe. (225). —

236. Quand les 2 axes AB, DE conjugués sont donnés, p. déterminer les point g, f ; formez un Δ rectangle avec les 2 demi axes CA, CE., prenez l'hypotenuse AE, et portez la du centre C sur le 1r. axe indeterminée vous aurez dans les hyperboles 2 points g, f que l'on apelle les foyers de l'hyppole.

237 Le parametre du 1r. axe se détermine par cette analogie $2a : 2b :: 2b : \frac{4bb}{2a} = \frac{2bb}{a} = p$ et celuy du 2d. axe par celle cy – $2b : 2a :: 2a : \frac{4aa}{2b} = \frac{2aa}{b} = 5$. D'où il suit que le parametre du $\frac{1}{2}$ grand axe et du $\frac{1}{2}$ petit axe

Sont $\frac{bb}{a} = \frac{1}{2}p$. et $\frac{aa}{b} = \frac{1}{2}t$.

et que $\frac{1}{2}ap = bb$ et $\frac{1}{2}bt = aa$. —

238. Il suit encore que le rectangle de l'axe ab par son paramètre est égal au quarré de l'axe conjugué DE, et que le rectangle du 2d. axe DE par son paramètre est égal au quarré du 2d. axe ab

Theor.

239. Le 2d. ½ axe est moyen proportionel entre les 2 distances d'un des foyers aux sommet des 2 hyperboles. —

Démonstration.

$aE = cf$ (236.) $= c$. $ag = cf = c+a$. $af = c-a$. or le △ rectangle acE donne $\overline{cE}^2 = \overline{aE}^2 - \overline{ca}^2$. c'est à dire $bb = cc - aa$. or $a-c : b :: b : c+a$.

Donc &c

Théoreme. 2d fig. 46.

240 Le quarré pm d'une ordonnée quelconque au grand axe ab est au rectangle ap × bp ou $\overline{cp}^2 - \overline{ca}^2$ des abscisses correspondantes comme $\overline{ce}^2$ du 2d. $\frac{1}{2}$ axe est au $\overline{ca}^2$ du $\frac{1}{2}$ 1r. axe. c'est à dire $yy : xa - aa :: bb : aa$.

Démonstration

Du point M aux foyers f, g soient menées les droites mg, mf. du point m, comme centre avec le rayon mf soit décrit un cercle hftk qui coupera mg prolongé en 2 points h, k et l'axe ab aussi prolongé en 2 points, f, t, tant que l'ordonnée mp ne

Autre démonstration.

Du point m aux foyers f, g soient menées les droites mg, mf. Ayant supposé une droite $mt = mf$ portée de m de l'autre côté de l'ordonnée mp, ce qui donne $pt = pf$. $gt = cg + cp + pf$ ou bien $c + x + x - c = 2x$. Dans le Δ rectangle gmt, on a ~~gm — mt~~

$gm - mt : gf :: gt : gm + tm$ (638 géom)

ou $2a - : 2c :: 2x : \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$. Donc (245 calcul) fm, ou $mt = \frac{cx}{a} - a$, ou $\frac{cx - aa}{a}$.

Or à cause du Δ rectangle fmp, on a $\overline{pm}^2 = \overline{fm}^2 - \overline{fp}^2$, ou $yy = \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^2} - xx + 2cx - cc$. Mais $cc = aa + bb$ (239) donc en substituant il vient

$$yy = \frac{a^2x^2 - b^2x^2 - 2a^2cx + a^4 - a^2x^2 + 2a^2cx - a^4 - a^2b^2}{a^2}$$

$= \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{aa}$, c'est-à-dire $yy : xx - aa :: bb : aa$; ou $\overline{pm}^2 : ap \times bp :: \overline{ce}^2 : \overline{ca}^2$. Donc &c.

passera pas par le foyer f;

— Soit encore divisée gh en deux egalement en i par la formation de l'hyperbole, on a $gm - mf = 2a$. donc aussy gm ~~-fh~~ ou $gh = 2a$ donc si on divise cette ligne en deux egalement en i, on aura gi ou $hi = a$; d'ou il suit que $mi = \frac{1}{2} gk$ car $gk = gh$, ou $2hi + 2mh$ au lieu que $mi = hi + mh$. de meme $cp = \frac{1}{2} gt$. car ~~cp~~ $= gf + ft = 2cf + 2fp$ et $cp = cf + fp$ cela posé. —

acause du cercle et des secantes exterieures gt, gk, on a $gh : gt :: gf : gk$ ou $gi : mi$ c'est adire $2a : 2x :: 2c : \frac{2cx}{a} = gk = 2mi$. donc en divisant

par 2 il vient. $a : x :: c : \frac{cx}{a}$

prenant la somme, ensuite la difference des antecedens et des consequens, $a : x + a$ :: $c + a : \frac{x + cx}{a}$.

$a : x :: c - a : \frac{cx}{a} - x$.

faisant un componendo un dividendo, on trouvera

$a : x + a :: c + a : a + c + x + \frac{cx}{a} =$
$gm + gp$

$a : x - a :: c - a : a - x - x + \frac{cx}{a}$
$= gm - gp$. donc en x. ant ces 2 proportions par ordre, il viendra;

$aa : xx - aa :: cc - aa : \overline{gm}^2 - \overline{gp}^2$. or mettant yy a la place du $\overline{gm}^2 - \overline{gp}^2$ et bb a la place $aa - cc$ qui luy est egal (239). ensuite alternando et invertendo, on aura $yy : xx - aa :: bb : aa$, ou $\overline{pm}^2 : ap \times sp :: c\bar{e}^2 : c\bar{a}^2$. donc &c

Cor. 1.er

241 Donc les quarrés des ordonnées au 1.er axe sont entre eux, comme les produits de leurs absisses. Car les quarrés sont aux rectangles de leurs absisses dans la raison constante du $\overline{CD}^2$ au $\overline{CA}^2$.

Cor. 2.e

242 Le quarré d'une ordonnée quelconque au 1.er axe est plus ~~grand~~ petit que le rectangle des absisses. Car car $yy : xx-aa :: bb : aa$. or bb est $< aa$. donc aussi yy est $< xx-aa$

Cor. 3.e

243 De la proportion. $yy : xx-aa :: bb : aa$, on tire cette équation $xx-aa = \frac{aayy}{bb}$, ou celle cy, $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ qui exprime la nature de l'hyperbole considérée par raport au 1.er axe en contant l'origine des x au centre C.

244. L'équation de l'ellipse raportée au 1er axe est $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, ou $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. ainsi la expression des propriétés de l'hiperbole ne doivent differer de celles des propriétés de l'ellipse que dans les signes + et −. L'hiperbole a le signe −, là ou l'ellipse a le sig. + et au contraire. — =

Cor. 4° fig. 47.

245. 1° L'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ donne $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{bb + yy}$. ce qui fait voir que si on prolonge fh jusqu'en l, ensorte que fh = hl, le point l sera à l'hyperbole. (fig. 47)

2° La même équation donne $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$. d'où il suit que l'hyperbole rencontre les paralleles ml, et, pf des 2 cotés de ab, tant

que x = c pe suppose $a = cB$ ou ca.

3° Si on fait $x = \pm a$, l'on aura $aa - aa = 0$ ainsy $y = \pm \frac{B}{a} \sqrt{xx-aa} = 0$: ce qui fait voir que la ligne fE se confond avec la ligne aB, le point b avec le point c. D'où il suit que le point f se confond avec point B et le point E avec le point E, ainsy la courbe coupe son axe aux extrémités du même axe, comme on l'a deja remarqué. —

4° Si a est plus grand que x, la quantité $xx-aa$ devient negative, et ainsy les valeurs de $y = \pm \frac{B}{a} \sqrt{xx-aa}$ deviennent imaginaires. d'où il suit qu'il ne peut y avoir aucun point de la courbe entre le centre et les extremités de l'axe. —

5° Si on fait $x = \pm \infty$ (cette notte designe une grandeur infinie), on aura $\pm y = \infty$. Donc les 2 branches de chacune des hyperboles opposées s'éloignent continuellement de leurs axes.

6° Si on fait $x = \pm c$, on trouvera, $yy = \frac{BBcc - BB}{aa} = (cc-aa)$

$\times \frac{bb}{aa}$. donc $yy = \frac{b^4}{aa}$. puisque $bb = cc - aa$.
donc ~~yy~~ $y = \frac{bb}{a}$, c'est-à-dire, que l'ordonnée
qui passe par le foyer est une 3e.
proportionelle au $\frac{1}{2}$ 1er. axe et au $\frac{1}{2}$ 2e.
axe, et ainsy égale au $\frac{1}{2}$ paramètre,

Cor. 5e

246. L'hyperbole s'éloigne toujours
de plus en plus de son axe,
car dans l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$
si les x augmentent, les y croîtront
aussy, puisque x augmentant, xx
augmentera: donc le membre $xx - aa$
augmentera, parce qu'on ôtera toujours
la même grandeur d'une plus grande.
Or le membre $xx - aa$ croissant,
son égal $\frac{aayy}{bb}$ croîtra: mais il
ne peut croître par les grandeurs
$\frac{aa}{bb}$ qui sont constantes, donc il
croîtra par yy. donc les
ordonnées y croissent à mesure
que les abscisses x augmentent.
Donc l'hyperbole s'éloigne

de plus en plus en plus de son axe et même à l'infini, car il n'y a rien dans l'équation qui empêche x de croître à l'infini.

Cor. 6e. fig. 48.

247.e Donc 1o. une paralelle quelconque dl au 1r. axe ne rencontre l'hyperbole que dans un seul point, et ~~entrant~~, ou est determinée d'entrer dans l'espace hyperbolique.

2o. Si on joint 2 points gh de l'hyperbole par une droite gh elle ira rencontrer le 1er axe en quelque point f.

3o. une tangeante tn à l'hyperbole en quelque point que ce soit, excepté le sommet, est determinée à rencontrer le 1r. axe. (Même demonstration qu'ici articles que dans la

parabole.)

Cor. 7e. fig. 49.

148. 1°. Déterminer le 2d. axe par le moyen de l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, quand le 1er est donné ; de l'extrémité E du 2d. axe abaissez la perpend. eb qui rencontrera l'hyperbole en un point b (247) du quel menée l'ordonnée gb qui sera égale à CE moitié du 2d. axe : donc $\overline{gb}^2 = yy = bb$. Donc si au lieu de yy, on met bb. on aura $xx - aa = \frac{aabb}{bb} = aa$, et par transposition $xx = 2aa$, ce qui fait voir que quand l'ordonnée est égale au 2d. axe, l'indéterminée x correspondante est l'hypoténuse d'un Δ isocelle rectangle dont chaque coté est égal a la $\frac{1}{2}$ du

1er. axe. donc pr. avoir le 2e. axe, quand le 1er. est donné, sur le milieu c du 1er. élevez une perpend. indéfinie Df, sur laquelle prenez la partie cL = cs $\frac{1}{2}$ du 1er. axe: tirez l'hypotenuse sL, portez la de c en g. du point g mené l'ordonnée gh, elle sera égale à la $\frac{1}{2}$ du 2e. axe. —

Demonst.

$\overline{sL}^2 = \overline{cL}^2 + \overline{cs}^2 = aa + aa = 2aa$. or cg = sL. (cons). donc $\overline{cg}^2 = 2aa$. mais quelque puisse etre la $\frac{1}{2}$ z du 2e. axe, on a toujours $xx - aa : yy = \overline{gh}^2 :: aa : zz$. donc en mettant 2aa à la place de xx, on aura $2aa - aa$, ou $aa : \overline{gh}^2 :: aa : zz$. donc $\overline{gh}^2 = zz$, ou gh = z, c'est à dire, que l'ordonnée gh est égale au $\frac{1}{2}$ 2e. axe, en suivant la construction donnée. —

Cor. 8e.

249 De la proportion qui donne le parametre 2a : 2b :: 2b : p, on tire 4aa : 4bb :: 2a : p. ou invertendo. bb : aa :: p : 2a. or on a pr. ordonnée quelconque au 1r. axe yy : xx−aa :: bb : aa. donc on aura aussy yy : xx−aa :: p : 2a ; c'est-à-dire, que le quarré d'une ordonnée quelconque au 1r. axe est au rectangle des abscisses ; comme le parametre de cet axe est au meme axe.

Cor. 9e

250. La pportion yy : xx−aa :: p : 2a donne cette equation. $yy = \frac{pxx}{2a} - \frac{app}{2}$; on l'apelle l'equation au parametre.

Theo. 3e. fig. 48.

251 Le q2 d'une ordonnée au 2e. axe

cl est à la somme $\overline{cl}^2+\overline{cq}^2$ des quarrés du $\frac{1}{2}$ 2e axe cl, et de l'abscisse cq, comme le quarré du $\frac{1}{2}$ 1r. axe ca est au quarré du $\frac{1}{2}$ 2e. axe cl. c'est-à-dire, que chaque ordonnée mq au 2e. axe donnera cette proportion. $\overline{mq}^2 : \overline{cl}^2+\overline{cq}^2 :: \overline{ca}^2 : \overline{cl}^2$.

L'équation $xx-aa=\frac{aayy}{bb}$ donne $xx : yy+bb :: aa : bb$, ou $\overline{mq}^2 : \overline{cl}^2+\overline{cq}^2 :: \overline{ca}^2 : \overline{cl}^2$: car à cause du parallelograme cqmp pm=cq et mq=cp. donc &c.

Cor: 1r.

282 donc les quarrés des ordonnées au 2e. axe sont entre eux comme la somme des quarrés du 2e $\frac{1}{2}$ axe et des abscisses correspondantes cq prise du centre, puisque la raison de $\overline{ca}^2$ au $\overline{cl}^2$ qui exprime la raison du quarré d'une ordonnée à cette somme

est une raison constante.

Cor. 2e

253. Donc si on apelle toujours x une ordonnée extérieure mq et y l'abcisse cq; la proportion. $xx : yy + bb :: aa : bb$ donne cette équation $xx = (yy + bb) \times \frac{aa}{bb}$ qui est l'équation de l'hyperbole considerée par raport à son 2e axe, ce qui peut servir à la décrire, de même que l'équation au 1er axe. —

254. Remarquez. Si les points de l'hyperbole raportée au 2d. axe ne donnent pas la même équation quand ils sont raportés au 1er. axe, comme il arrive dans l'ellipse, c'est que la ligne CE n'est pas, a proprement parler, un axe de l'hyperbole: car si CE coupe en 2 également toutes les lignes menées paralellement au 1r. axe

acb (230) cela n'arrive que parcequ'on considere en même tems les hyperboles opposées, ce qui est accidentel, puisqu'on peut découvrir les proprietés de l'hyperbole sans considérer son opposée.

Cor. 3e.

255 Si les 2 ½ axes ca, et ce sont égaux, l'équation au 2d. axe se réduit a celle cy $xx = yy + bb$; on nomme *hyperbole equilatere* celle qui est désignée par cette equation. D'où il suit qu'on peut aisement décrire cette courbe par le moyen du Δ rectangle en prenant toujours sur la perpend. mq au 2d. axe une partie finie mq égale à l'hypotenuse aq du Δ rectangle aCq: puisque dans tous les cas on aura toujours chaque $\overline{mq}^2 = \overline{cq}^2 (yy) + \overline{ca}^2 (bb)$ - car ~~à cause de~~ l'hyperbole est supposée équilatere donc ca = ce ou b=a.

Cor. 4e

256 De la proportion qui donne le paramètre du 2e axe $2b : 2a :: 2a : p$. on tire $bb : aa :: 2b : p$. et invertendo $aa : bb :: p : 2b$. mais on a pr. chaque ordonnée mq au 2e axe $xx : yy + bb :: aa : bb$. donc on aura ; $xx : yy + bb :: p : 2b$, c'est à dire, que le quarré d'une ordonnée au 2e axe est à la somme des quarrés du $\frac{1}{2}$ axe ce et de l'absisse cq, comme le paramètre du 2e axe est au 2e axe.

Cor. 5e

257. La proportion $xx : yy + bb :: p : 2b$ donne cette équation :

$xx = \frac{pyy}{2b} + \frac{bp}{2}$, équation à l'hyperbole par raport au paramètre du 2e axe.

Cor. 6.

Nta. Dans l'ellipse il est plus petit. (148).

258. Le quarré d'une ordonné quelconque pm au 1er axe est plus grand que le rectangle de l'absisse ap par le parametre p du meme axe. car $p = \frac{2bb}{a}$. $ap = cp - ca$ $= x - a$. donc $ap \times p = x - a \times \frac{2bb}{a}$.

$\overline{pm}^2 = yy = \frac{bbxx - aabb}{aa} = \frac{xx - aa}{a}$ $\times \frac{bb}{a}$. il faut donc démontrer que $\frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a}$ est plus grand que $x - a \times 2\frac{bb}{a}$. or $\frac{xx - aa}{a} \times \frac{bb}{a}$ $: x - a \times 2\frac{bb}{a} :: \frac{xx - aa}{a} : x - a \times 2$ en divisant par $\frac{bb}{a}$. et $\frac{xx - aa}{a}$ $: x - a \times 2 :: \frac{x + a}{a} : 2$, en divisant par $x - a$.. et $\frac{x + a}{a} : 2 :: x + a : 2a$ en multipliant par a. mais $x + a : 2a$

:: $\delta p : \delta a$. donc $\frac{xx-aa}{aa} \times \frac{\delta\delta}{a}$

$x-a \times \frac{2\delta\delta}{a}$ :: $\delta\delta$: $a\delta$. c'est-à-dire

$\overline{pm}^2 : \delta p \times p$ :: $\delta p : ap$. or δp

est plus grand que $a\delta$

donc aussy $\overline{pm}^2$ est plus grand

que $\delta p \times p$.

De meme le quarré d'une ordonnée mq au 2.d axe est plus grand que le rectangle de l'abcisse cq par le paramètre r du meme axe car $r = \frac{2aa}{\delta}$. $\overline{mq}^2 = xx = \delta\delta + yy \times \frac{aa}{\delta\delta}$. $cq = y$. il faut donc démontrer que $\delta\delta + yy \times \frac{aa}{\delta\delta}$ est plus grand que $\frac{2aay}{\delta}$. or $\delta\delta + yy \frac{xaa}{\delta\delta} : \frac{2aay}{\delta}$

:: $\frac{\delta\delta + yy}{\delta} : 2y$. en divisant

par $\frac{aa}{b}$ et $bb + yy$: $2y$ :: bb + yy : $2by$, en [illegible] par b. mais bb + yy est plus grand que $2by$ par ceque la somme des quarrés de 2 grandeurs inegales est tousjours plus grande que le double du produit by de ces grandeurs. donc $bb + yy \times \frac{aa}{bb}$ est plus grand que $\frac{2aay}{b}$. c'est a dire que $\overline{mq}^2$ est plus grand que $cq \times t$. Donc &c.

259. Remarques. pr. la verité de cette derniere proposition il faut que $cq = y$ soit plus grand, ou plus petit que la $\frac{1}{2}$ b du 2.d axe. car si $y = b$, on auroit $bb + yy = 2bb$. et $2by = 2bb$. donc $bb + yy$ egaleroit $2by$. ainsy $\overline{mq}^2$ egaleroit $cq \times t$.

... est ... du quarré de ... formée sur le rectangle de l'ellipse par le paramètre qui a fait donner le nom d'hyperbole à cette section conique, du mot grec ... superlation ; excès. —

Cor. 7e.

260 La distance du foyer f au sommet de l'hyperbole est plus petite que le quart du paramètre.

N.^{re} Dans l'Ellipse elle est plus grande que le $\frac{1}{4}$ du paramètre (Voy. 136), et égale dans la parabole (60).

D. c'est-à-dire, que af est plus petit que $\frac{p}{4}$. car $af = cf - ca = c - a$. $p = \frac{2 bb}{a}$ et $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a}$ donc $af : \frac{p}{4} :: c - a : \frac{bb}{2a}$. mais $c - a : \frac{bb}{2a} :: c - a : \frac{cc - aa}{2a}$ à cause que $bb = cc - aa$ et $c - a : \frac{cc - aa}{2a} :: c - a \times 2a : cc - aa$, et divisant le dernier rapport par $c - a$, on aura $c - a : \frac{cc - aa}{2a} :: 2a : c + a$.

or 2a : c+a :: ab : bf. donc

af : $\frac{p}{4}$ :: ab : af. mais ab est < bf

donc af est plus petit que $\frac{p}{4}$. c. q. f. d.

Prob. 2e.

26. une hyperbole, ses foyers g. f,
son axe ab, et un point quelconque
M sur cette courbe étant données,
menez une tangeante mt à ce
point.

Solution

Du point donné M tirez aux
foyers f, g les droites mf, mg.
du meme point M comme centre
avec le rayon fm, décrivez un
arc de cercle qui coupera la
ligne Mg en un point h ; auquel
menez fh, que vous diviserez en
2 egalemt. en r par le point r, et
le point donné, tirez m r t elle
sera la tangeante demandée.

Démonstration

gm − fm = gh = ab (240) or
cette propriété ne convient

qu'au point m. car d'un point quelconque s de la tangeante different de ce soient tirées aux points f, g, h, les droites sf, sg, sh. — a cause du Δ sgh, sg est < sh + gh. mais sh = sf puisque (cons) mt est perpend au milieu de fh. donc sg est plus petit que sf + gh. donc sg - sf est plus petit que gh = ad. donc le point s n'est pas a l'hyperbole puisque la difference des lignes menées de ce point aux 2 foyers n'est pas egale au 1er axe. et comme il en sera de meme de tout autre point excepté le point m, il suit que la ligne mt ne touche l'hyperbole qu'au seul point M.

Cor. 1er. fig. 50

262 Donc les lignes mg, mf menées d'un meme point M aux foyers, forment avec la tangeante mt

d'un meme coté des angles egaux fmt, hmo. car fmt = gmt (cons). mais gmt = hmo qui luy est opposé au sommet. donc fmt = hmo.

Cor. 2e. fig. 30

263 Donc un rayon fm parti du foyer f. et terminé à la courbe en M sera réflechi dans ce point suivant une direction hm dont le prolongement passeroit par l'autre foyer g, puisque l'angle d'incidence fmt, égale l'angle de reflexion hmo.

Réciproquement un rayon gm parti du foyer g et terminé a la courbe en M, sera réflechi en ce point suivant une direction m k dont le prolongement passeroit par l'autre foyer f. C'est par cette raison que les points f, g sont apellés *foyers*.

264. on apelle <u>soustangeante</u> la partie de l'axe comprise entre l'extremité p de l'ordonnée menée par le point de contacte et le point t où le même axe est coupé par la tangeante. D'où il suit que la partie qt du 2e axe sera aussy la soustangeante prise sur le même axe.

Une droite mL perpend.e à la tangeante en m et terminée a l'axe en L, s'apelle <u>normale</u>, ou <u>perpendiculaire</u>.

La partie pL comprise entre l'extremité p de l'ordonnée pm qui passe par le point de contacte et la rencontre de l'axe par la normale pL se nomme la <u>sousnormale</u>, ou <u>sousperpendiculaire</u>.

Probleme 8.e

165 Trouver l'expression analytique de la sousnormale pl prise sur le 1.er axe.

Solution.

Les droites mL, fh étant perpend à la tangeante mT sont paralelles. donc les Δ gfh, gtm sont semblables. donc gh : gf :: mt ou mf : fl. ou $2a : 2c :: \frac{cx}{a} - a$ (*) $: fl = \frac{ccx}{aa} - \frac{aac}{aa}$. Or si de fl on ôte $fp = x - c$, quand le point p tombe audelà de f par raport à a, ou si on ajoute à fl la grandeur $pf = c - x$ dans le cas où p tombe entre a et f, l'on aura la sousnormale pl

(*) Car dans le Δ rectangle gmt, on a $gm + mt : gf :: gt : gm + mt$ (638 géom.) ou $2a : 2c :: 2x : \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$. Donc (245 calcul) fm ou $mt = \frac{cx}{a} - a$, ou $\frac{cx - aa}{a}$.

$$= \frac{ccx - aac}{aa} - \frac{aax + aac}{aa} = (cc - aa)$$

$\frac{x}{aa}$, on mettant $\beta\beta$ pr. $cc - aa$,

$pl = \frac{\beta\beta x}{aa}$. Dans l'ellipse elle est $= (aa - cc)\frac{x}{aa} = \frac{bbx}{aa}$. (163).

Cor. 1. —

266. Donc la sous~~normale~~ tangente pl et l'abscisse cp sont toujours dans un rapport constant qui est celuy du $\overline{ce}^2$ au $\overline{ca}^2$. car l'équation $pl = \frac{\beta^2 x}{aa}$ donne $pl : x :: \beta\beta : aa$. ou $pl : cp :: \overline{ce}^2 : \overline{ca}^2$. Si on suppose l'hyperbole équilatere on aura toujours $pl = cp$, puisque dans cette courbe les 2 axes sont égaux entre eux. Ainsy la distance du point p au point l est égale à celle du même point p au centre c. —

Cor. 3e

267 Il est facile d'avoir la sousnormale qr sur le 2e. axe grand on connoit pt ; les Δ semblables mpt, mqr donnent pt : pm ou pt :: mq : qr. ou $\frac{bbx}{aa} : y :: x : qr = \frac{aay}{bb}$. d'où il est facile de deduire, comme pr. le 1r. axe, cq : qr :: $\overline{ce}^2 : \overline{ca}^2$.

Prob. 4e

268. Trouver l'expression analytique de la soustangeante pt prise sur le grand axe.

Solution.

a cause du Δ rectangle tmt, on a pt : pm :: pm : pt. donc $pt = \frac{\overline{pm}^2}{pt}$ et en substituant les valeurs analytiques du $\overline{pm}^2$ et de pt, on aura $pt = (xx-aa) \times \frac{bb}{aa}\,\frac{xaa}{bbx} = \frac{xx-aa}{x}$ (*)

(*) Dans l'ellipse elle est $= \frac{aa-xx}{x}$ (166)

Cor. 1er, fig. 46.

169 Pour avoir l'expression analytique de la soustangeante qs sur le 2e axe. Les Δ semblables pmt, qsm donnent pt : mp :: qm : qs, et analytiquement $\frac{xx-aa}{x} : y :: x : \frac{xxy}{xx-aa}$.

mais (253) $xx = (yy+bb) \times \frac{aa}{bb}$ et $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$. Donc mettant ces valeurs, on aura $qs = (yy+bb) \times \frac{aa}{bb} \times \frac{bb}{aayy} \times y$, ce qui se réduit à $qs = \frac{bb+yy}{y}$.

Ou bien
Le Δ rectangle rqm donne rq : qm :: qm : qs, ou bien $\frac{a^2y}{bb} : x :: x : \frac{bbxx}{a^2y}$. Mais $xx = (bb+yy)\frac{aa}{bb}$ (253) donc en substituant on a $qs = (bb+yy)\frac{aa}{bb} \times \frac{bb}{a^2y} = \frac{bb+yy}{y}$.

Cor. 2e.

270. Si de cp = x, on ôte pt $= \frac{xx-aa}{x}$, on aura $ct = \frac{aa}{x}$.(*)
De même si de $qs = \frac{yy+bb}{y}$ on ote cq = y, on aura $cs = \frac{bb}{y}$. L'équation $ct = \frac{aa}{x}$ donne x : a :: a : ct

(*) comme dans l'ellipse (168)

on cp :: ca : ca : ct, de même l'equation $cs = \frac{ab}{y}$ donne ~~y : ab :: c~~ y : b :: b : cs, ou cq : ce :: ce : cs ; ce qui fournit un moyen facile de mener une tangeante mts à un point donné sur l'hyperbole, par le secours de l'un des axes. car du point donné m abaissez une ordonnée mp, ou mq cherchez ensuite sur le 1er ou le 2e axe une 3e proportionelle ~~ct~~ ct, ou cs aux abscisses cp, ou cq et à chaque ½ axe ca, ou ce : par les points m, t, ou par m, s tirez la droite mts, elle sera la tangeante demandée ; ce que l'on démontrera comme dans l'ellipse. (167).

Cor. 3.e

271 L'équation $pt = \frac{xx-aa}{x}$ donne — $x : x+a :: x-a : pt$, c'est-à-dire, — $cp : ap :: ap : pt$, ce qui donne un autre moyen de mener une tangeante à l'hyperbole dont l'axe, et un point sont donnés.

De même si de $ca = a$, on ôte $ct = \frac{aa}{x}$, on trouvera $at = \frac{ax-aa}{x}$; d'où l'on tire $x : x-a :: a : at$ c'est-à-dire, $cp : ap :: ca : at$, ce qui est encore un moyen de mener une tangeante. —

Cor. 4.e

272. Si dans l'équation $ct = \frac{aa}{x}$, on fait $x = a$, et ensuite $x = \infty$; on trouvera dans le 1.er cas $ct = ca$, et dans le 2.e $ct = 0$. Donc le lieu de tous les points de rencontre de l'axe et de toutes les tangeantes qu'on peut mener à l'hyperbole est compté entre le centre c, et le sommet a de la courbe. —

Demême si dans l'expression $cs = \frac{bb}{y}$, on fait $y=0$, et $y=\infty$, on trouvera d'abord $cs=\infty$. d'où il suit que la tangeante en a et le 2.^d axe ce ne se rencontrent qu'à une distance infinie, et ainsy sont paralleles. or le 2.^d axe est perpend. au 1.er, donc aussy la tangeante au sommet a sera perpend. à l'axe aB. La 2.e supposition de $y=\infty$ donne $cs=\frac{bb}{\infty}=0$: donc encore la tangeante qui répond à un abscisse infini passe par le centre. –

Cor. 9.^e

273. Connoissant les lignes pl, pm, pt, ct, il est facile de trouver l'expression analytique de la normale ml, de la tangeante mt, des lignes al, at, ou Bl, Bt et de cl. —

1.° le Δ rectangle lpm donne

$$ml = \sqrt{mp^2+lp^2} = \sqrt{(cx-aa)\times\frac{bb}{aa}+\frac{b^4x^2}{a^4}}.$$

2.° le Δ rectangle mpt donne.

$$mt = \sqrt{pm^2 + pt^2} = \sqrt{(cx-aa)\times\frac{bb}{aa}}$$

$$+\frac{(xx-aa)}{xx} = \sqrt{(xx-aa)\frac{b^2x^2}{a^2x^2} + (x^2-a^2)^2\frac{a^2}{a^2x^2}}, \text{ ou}$$

$$= \sqrt{\frac{a^6 - 2a^4x^2 + a^2x^4 - a^2b^2x^2 + b^2x^4}{a^2x^2}}.$$

3°. Si à $pt = \frac{bbx}{aa}$, on ajoute $ap = x - a$, ou $bp = x + a$, on trouvera $at = \frac{bbx + aax - a^3}{aa}$ et $bt = \frac{bbx + aax + a^3}{aa}$.

4°. Si on ôte $ct = \frac{aa}{x}$ de ca, ou si on ajoute cb à ct, on aura $at = ax - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x}$ et $bt = \frac{ax + aa}{x}$.

5°. Si à $cp = x$ on ajoute $pt = \frac{bbx}{aa}$, on trouvera $ct = \frac{aax}{aa} + \frac{bbx}{aa} = \frac{ccx}{aa}$, puisque $cc = aa \pm bb$.

Cor. 6e.

174. Ayant l'expression algébrique des lignes qr, qm, qs, cs, il est facile de trouver, comme dans le corollaire précédent, la valeur des lignes, mr, ms, cr, cs, ou Dr, Ds, et de ct

prises sur le 2d axe. —

1°. Le Δ rectangle mqr donne

$$mr = \sqrt{\overline{mq}^2 + \overline{qr}^2} = \sqrt{(bb+yy) \times \frac{aa}{bb} + \frac{a^4 y^2}{b^4}}.$$

2°. Le Δ rectangle mqs donne

$$ms = \sqrt{\overline{mq}^2 + \overline{qs}^2} = \sqrt{(yy+bb) \times \frac{aa}{bb} + \frac{(bb+yy)^2}{yy}} = \sqrt{(bb+yy) \times \left(\frac{a^2y^2 + b^2y^2 + b^4}{bbyy}\right)},$$

ou $= \sqrt{(yy+bb)\frac{a^2y^2}{b^2y^2} + (bb+yy)^2\frac{bb}{bbyy}} = \sqrt{\frac{b^6 + 2b^4y^2 + b^2y^4 + a^2b^2y^2 + a^2y^2}{b^2y^2}}$

3°. Si on ajoute $eq = y - b$ à qr, ou si on ajoute $Dq = y + b$ à la meme ligne, on aura er, ou Dr $= \frac{aay + bby \mp b^3}{bb}$. Il faudra retrancher eq de qr quand le point q tombe entre C et E,

4°. Si on ajoute CE à CS ou si on ôte CS de CD, quand S tombe entre C et D, ou enfin si on ôte CD de CS, quand S est au delà de D, par raport

au centre c, on aura $\delta\delta$, ou

$$D\delta = \frac{\frac{1}{2}\,\beta\beta \mp \beta y}{y}.$$

5°. si $acq = y$ on ajoute qr, on trouvera $cr = \frac{\beta\beta y + aay}{2\beta\beta} = \frac{ccy}{\beta\beta}$.

Scolie.

275. toutes ces lignes dont on vient de chercher la valeur, peuvent servir à mener les tangentes à l'hyperbole, soit par le moyen du 1er., soit par le moyen du 2d. axe. Mais on se contente ordinairement des lignes ct, ou pt, ou at, ou βt sur le 1er. axe; et de leurs correspondantes sur le 2d., parceque ces lignes fournissent les constructions, et solutions les plus simples. On pourroit encore trouver des nouvelles expressions algébriques.

des mêmes lignes, en faisant usage du paramètre de chacun des axes.

Des propriétés de l'hyperbole raportée à ses asymptotes.

276 Une tangeante qui ne peut rencontrer une courbe qu'à une distance infinie s'apelle une asymptote.

Prob. 8e. fig. 46 et 50.

278 Déterminer les asymptotes de l'hyperbole.

Solution.

fig. 46. On a déja vu (272) que si dans l'expression de $Ct = \frac{aa}{x}$, on fait $x = \infty$, $Ct = 0$, c'est-à-dire, que le centre C est un point de l'asymptote. Pour en avoir un autre, élevez

par le point a une perpend. ar terminée à une tangeante quelconque en r, et chercher l'expression analytique de cette ligne. Les △ semblables tpm, tar donnent pt : pm :: at : ar. ou $\frac{xx-aa}{x} : \frac{b}{a} :: \sqrt{xx-aa} :: \frac{ax-aa}{x} : ar$ que l'on trouvera égal à $b\,\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}$, en divisant les 1ers termes par $\sqrt{xx-aa}$, et les 2 antécédents par $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$ (*). Maintenant si dans cette valeur de ar, on fait $x = \infty$, le numérateur et le dénominateur de cette fraction deviennent égaux et la ligne ar devient égale b, ce qui donne cette construction des asymptotes.

Par le sommet A de l'une des hyperboles opposées, soit

---

* Car en divisant les 2 premiers termes par $\sqrt{xx-aa}$, il vient $\sqrt{\frac{xx-aa}{x}} : \frac{b}{a} :: \frac{ax-aa}{x}$ ou $a\left(\frac{x-a}{x}\right) : ar$, divisant ensuite les antécédens par $\sqrt{\frac{x-a}{x}}$, on a $\sqrt{x+a} : \frac{b}{a} :: a\sqrt{x-a} : ar = \frac{ab}{a}\,\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}} = b\,\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}$.

fig. 50. prises de part et d'autre de l'axe les parties af, ag chacunne égale à ce et perpend. au même axe, ensuite par le centre c et par les points f, g tirés cn, cr, elles seront les asymptotes cherchées.

Cor. 1re

278 Il est évident que les asymptotes cl, cr de l'hyperbole sat étant prolongées vers l et vers m sont aussy les asymptotes de l'hyperbole opposée, puisque ces hyperboles sont égales et semblables.

Cor. 2e, fig. 50.

279 Les droites aD, aL menées des extrémités du 2e axe DL au sommet de l'hyperbole, sont coupées en 2 également par les asymptotes aux points h, o. Car les rectangles formés sur les 2 axes, étant égaux, leurs diagonales sont égales, or elles se coupent mutuellement par le milieu en h et o; donc ah = Dh, fh = ch, ao = Lo, co = og. Donc toutes les lignes sont égales entre elles.

280. Le parallelograme $abco$, ou $\overline{ch}^2$ est apellé La puissance de l'hyperbole: il est toujours égal à la 4e partie de la somme des quarrés des 2 ½ axes ca, ce. Car ch n'étant que la moitié de l'hypotenuse ad, $\overline{ch}^2 = \frac{\overline{ad}^2}{4}$: or $\overline{ad}^2 = \overline{ca}^2 + \overline{cd}^2$, donc $\overline{ch}^2 = \frac{1}{4}\overline{ca}^2 + \frac{1}{4}\overline{cd}^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$.

Theo. 5e. fig. 51.

281. Si par un point quelconque m de l'hyperbole, on mene une droite $lmph$, ou mkn parallele au 2e. ou au 1r. axe, et terminée de part et d'autre aux asymptotes l'on aura toujours $lm \times mh = \overline{cd}^2$ ou $\overline{af}^2$, et $mi \times mk = \overline{ca}^2$.

Démonstration.

1o. de l'équation $yy = \frac{bbxx - bb}{aa}$, on tire bb ou $\overline{cd}^2 = \frac{bbxx}{aa} - yy = \frac{bx}{a} - y \times \frac{bx}{a} + y$. or à cause des Δ semblables caf, cpl, on a; $ca : af :: cp : pl$.

Autrement

5. Les Δ semblables caf, cpl donnent $ca : af :: cp : pl$ ou $a : b :: x : pl = \frac{bx}{a}$. Donc $lm = \frac{bx}{a} - y$, et $mh = \frac{bx}{a} + y$. Donc $lm \times mh = \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2$; et en substituant au lieu de y^2 sa valeur, il vient $lm \times mh = \frac{b^2x^2}{a^2} \frac{- b^2x^2 + a^2b^2}{a^2} = b^2$. Donc &c.

2°. Les Δ semblables cph, Kmh donnent ph : cp :: mh : mK, ou $\frac{bx}{a} : x :: \frac{bx}{a}+y : x+\frac{ay}{b} = mK$. Ensuite les Δ semblables cpl, iml donnent pl : cp :: lm : im, c'est-à-dire, $\frac{bx}{a} : x :: \frac{bx}{a} - y : im = x - \frac{ay}{b}$. Donc $mK \times im = xx - \frac{a^2y^2}{b^2}$: mais en substituant au lieu de xx sa valeur, on a $mK \times im = \frac{a^2y^2+a^2b^2-a^2y^2}{b^2} = aa$. Donc &c.

ou $a : b :: x : \frac{bx}{a} = pl$. donc $lm = pl - mp = \frac{bx}{a} - y$ et $mh = ph + mp = \frac{bx}{a} + y$.

donc $lm \times mh = \overline{af}^2 = \overline{cD}^2$.

2°. L'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, donne $xx - \frac{aayy}{bb} = aa = \overline{ca}^2 = x + \frac{ay}{b} \times x - \frac{ay}{b}$. or les Δ semblables cph, Kmh donnent ph : cp :: mh : Km. ou $\frac{bx}{a} : x :: \frac{bx}{a} + y : x + \frac{ay}{b} = mK$. ensuite les Δ semblables lim, lcp donnent pl : cp :: lm : mi. ou $\frac{bx}{a} : x :: \frac{bx}{a} - y : x - \frac{ay}{b} = mi$. donc $mi \times mK = xx - \frac{aayy}{bb} = aa = \overline{ca}^2$. donc &c.

Théor. 6°.

282\. Réciproquement si une droite quelconque Lh terminée par les côtés d'un Δ isoscelle lch est coupée en un point m, de manière que le rectangle $lm \times mh$ de ses parties soit égal au $\overline{af}^2$ de la $\frac{1}{2}$ d'une

autre droite fg terminé par les
cotés du meme Δ et parallele à
lb, le point M est à une hyperbole.

Demonstration.

Du sommet c soit tirée par
le milieu de fg ~~<u>soit</u>~~ l'indefinie
cp, elle divisera aussy par
le milieu la parallele lb.
Soit faitte $cb = ac$; au sommet
c soit élevée la perpend. cD,
et soit prise $ce = cD = af = ag$.
Les Δ semblables caf, cpl, donnent
$ca : af :: cp : pl$, ou $a : b :: x : \frac{bx}{a}$
$= pl$. donc $lm = pl - mp = \frac{bx}{a}$
$- y$ et $mb = pb + pm = \frac{bx}{a} + y$.
donc $lm \times mb = \frac{bbxx}{aa} - yy$.
or (supp) $lm \times mb = \overline{af}^2 = bb$,
donc $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy$; d'où l'on
tire $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, qui
est l'equation à l'hyperbole.

Donc le point est à une hyperbole.

Cor. 1er.

283. On a donc aussy $du \times dr = \overline{cD}^2 = lm \times mh = oh \times ol = tr \times tk$, ainsy toutes ces rectangles sont égaux entre eux. Donc $mh : rs :: ns : lm$.

Cor. 2e.

284. Les parties lm, ns, diminuent à mesure qu'elles s'éloignent du centre, ou ns est < lm. Car mh est < rx et rx est < rs. Donc mh est < rs. Or $mh : rs :: ns : lm$, donc mh étant plus petit que rs, ns est aussy plus petit que lm. Il en est de même de tr à l'égard de ho.

Cor. 3e.

285. Si deux points, o, t, on

on abaisse des perpend. oz, ch sur l'asymptote cr; th sera plus petit que oz. Car les △ semblables ozh, thr donnent tr : oh :: th : oz; or tr est < oh, donc th est < oz. Donc ces perpend. diminuent à mesure qu'elles s'éloignent du centre. —

Cor. 4°.

286 Donc à mesure que la branche sot de l'hyperb. s'éloigne du sommet os, elle s'approche continuellement de l'asymptote cr et cependant elle ne pourra jamais la toucher. Car si elle la touchoit, on auroit alors $po = ph$, ou $\overline{po}^2 = \overline{ph}^2$, c'est-à-dire, $yy = \frac{bbxx}{aa}$, puisque $ph = \frac{bx}{a}$, (281) Or cela est impossible, puisque $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ qui

est une grandeur plus petite que $\frac{bbxx}{aa}$, ou, ce qui revient au même, la ligne Lm ne peut jamais être nulle ou zero: car, dans ce cas, on auroit Lm × mh ou 0 = $\overline{cD}^2$. ———

Au reste pr. avoir une idée juste de cette propriété de l'hyperbole, il n'y a qu'à concevoir que Lm diminue nécessairement à mesure que mh augmente: ainsy quand Lm $= \frac{1}{\infty}$, alors mh = ∞. Donc Lm × mh $= \infty \cdot \times \frac{1}{\infty} = 1$ ou $\overline{cD}^2$, puisque l'unité étant indeterminée dans ce cas peut-être égale au $\overline{cD}^2$.

Théo. 7e. fig. 52.

787. Si par 2 points quelconques

h, q d'une hyperbole, on mène 2 droites quelconques hL, Sq paralleles entre elles terminées à l'une des asymptotes, et 2 autres droites quelconques hp, qt aussi paralleles entre elles et terminées à l'autre asymptote, on aura toujours : $Lh \times hp = Sq \times tq$.

Demonstration.

Par les points h, q soient tirées les droites mK, rn paralleles au 2^d. axe et terminées aux asymptotes. a cause des paralleles Lh, Sq, mh, rq, les Δ Lmh, Sqr sont semblables et donnent $Lh : mh :: Sq : rq$. De même à cause des paralleles hp, qt, hK, qn, les Δ phK, tqn sont semblables et donnent $ph : hK :: tq : qn$. Donc, en x^{ant} par ordre les 2 proportions, on

aura $lh \times ph : mh \times hk :: sq \times tq : rq \times qu$. mais $mh \times hk = rq \times qu$ (283). donc $lh \times hp = sq \times tq$. donc &c. —

Cor.

288. Si l'on imagine que les lignes lh, sq tournent autour des points h, q, jusqu'à ce qu'elles se confondent avec les droites hp, qt qui deviennent sh, pq, on aura toujours $hp \times lh = qt \times pq$.

Theo. 8e. fig 50. —

289. Si par un point point m de l'hyperbole, on tire à l'asymptote voisine ch une droite lm parallele à l'autre asymptote cr, et la droite mp parallele à l'asymptote ch, on aura $lm \times mp = \overline{ch}^2 = \overline{ch}^2$. —

Demonstration.

mp = lk. ensuite a cause des △ semblables lim, afh; lm : ab :: mi : af ou cD. or mi : cD :: cD : mk. (281) et a cause des △ semblables afh, mpk, af, ou cD : mk :: fh, ou ab : mp ou lk. donc lm : ab :: ab : lk. donc lm × lk = $\overline{ab}^2$.

Cor. 1er.

290. Donc tous les rectangles lm × lk, sq × cq sont tous égaux à la ~~distance~~ puissance de l'hyperbole $\overline{ab}^2$ et ainsy égaux entre eux. —

Cor. 2e.

291. Toutte droite comme lm tirée d'un des points de l'hyperbole à l'asymptote cn et parallele à l'autre asymptote cr, peut être

regardée ~~comme~~ comme une ordonnée, dont l'asymptote c ~~N~~ est la ~~ligne~~ ligne des abscisses car l'asymptote cr étant une tangeante à l'hyperbole, sa position détermine celle des ordonnées; l'origine des abscisses est en c, ainsy c L est l'abscisse des ordonnée m L. Si donc on fait $cL = x$, $mL = y$, et ch ou $ah = D$, on aura $xy = DD$, ou $xy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$, ce qui donne une nouvelle équation à l'hyperbole considerée par raport à ses asymptotes.

Cor. 3e.

292. De cette équation, l'on tire aisément $y = \frac{DD}{x}$, ou $y = DDx^{-1}$. Si l'on fait dans cette formule $x = 0$, y devient $\frac{DD}{0}$ qui désigne une grandeur infinie, et dans ce cas elle se confond avec

l'asymptote de la courbe. —

Demême si on suppose $x=\infty$, on aura $y=\frac{DD}{\infty}$ qui devient une grandeur infiniment petite. Quelques fois, on suppose la constante $DD=1$, et l'on exprime l'équation aux hyperboles raportée à leurs asymptotes par celle cy $y=x^{-1}$. —

Cor. 4e. fig. 53.

293 Il est aisé de voir que dans chacun des angles qcz, mcu adjacents à l'angle zcu, on peut décrire de nouvelles hyperboles par le moyen des puissances DD, égales aux puissances al, aq. Pr. cela il faut prendre sur les lignes rs, lh,

plongées autant qu'il sera necessaire, les parties ts, Vh égales aux ordonnées rt, lu : faire la même opération sur l'autre branche, et agis de même sur l'hyperbole opposée. Alors si par les extremités g, s, h dans l'angle ucm, on décrit une ligne, et une semblable dans l'angle opposé qcz, il en résultera 2 nouvelles hyperboles opposées qui sont dittes conjuguées aux 2 autres ; et reciproquement les 2 1ères sont conjuguées aux secondes, parce que ces 2 hyperboles font des fonctions semblables les unes à l'égard des autres. Leur formation, étant la même, elles ont absolument les mêmes propriétés. Les 4

hyperboles seront egales, quand les axes seront egaux, ou ce qui revient au meme, quand les asymptotes seront à angles droits ou encore quand les 2 hyperboles opposées seront equilateres.

Theoreme 9e. fig 54.

294. Les 2 parties Dh, fg d'une droite quelconque Dg menée à travers une hyperbole et interceptées entre la courbe et les asymptotes sont égales entre elles.

Demonstration.

Par les points f, h soient tirées les droites lh, hp, fℓ, fm paralleles aux asymptotes cD, cg. $fℓ \times fm = lh \times hp$. (289). donc $fℓ : hp :: lh : fm$. or les $\triangle$ semblables feg, gph, donnent $fℓ : hp :: fg : gh$ et les $\triangle$ semblables lDh, Dmf, donnent $lh : fm :: Dh : Df$. donc

fg : gh :: Dh : Df. donc dividendo

gh − fg : fg :: Df − Dh : Dh, c'est-a-dire.

fh : fg :: fh : Dh. donc fg = Dh. donc &c.

Cor. 1er. fig 55.

295 On tire de là une métode de décrire une hyperbole entre 2 lignes données p^r les asymptotes et q^{ui} passe par un point D donné. Par le point donné D tirez plusieurs droites aDm, ED n, gDc, Dc, terminées par les cotés de l'angle abc : faites ml = aD, no = ED, cr = gD. Ensuite faites passer par les points l, o, r ainsy déterminés une courbe, elle sera une hyperbole qui aura p^r asymptotes les droites ab, bc.

1°. La courbe ainsy formée est une hyperbole. (294).

2°. Soit abaissée bD perpend. sur aB; aD est plus grand que ED, ED plus grand que gD, mais aD = ml, ED = no, gD = cr (cons^t). donc ml est

plus grand que Or et NO plus grand que Vc. Donc à mesure que les points, L, O, R, s'éloignent du sommet, ils s'approchent de la droite Ac. Cependant aucun point de la courbe ne coïncidera avec la droite Ac : car quelque inclinée qu'elle soit, par exemple, la ligne gDc, son point r sera toujours au dessus de Ac (cons). Donc Ac est l'asymptote de la branche Lor. (276).

Si au point L, ou à un autre point quelconque de la branche Lor on fait la même construction qu'au point D, on aura l'autre branche lDs, et on prouvera par le même raisonnement que la droite AB est l'asymptote de la branche lDs.

Cor. 2e

296. Si on prend encore un point autre que le point D on

dedans ou au dehors de l'hyperbole DLr, déja décrite, on pourra en décrire une autre qui aura les mêmes assymptotes et qui ne rencontrera l'hyperbole DLr, qu'à l'extremité de ses branches infinies.

Cor. 3e. fig. 56.

297. On déduit encore de là une maniere fort simple de mener une tangeante à l'hyperbole dont on a les assymptotes.

Soit a le point dont on cherche la tangeante. Par le point a menez ab parallele à l'assymptote Cf; faites bD = Cb; du point D par le point a menez l'indefinie Dac, elle sera tangeante en a; c'est-à-dire, qu'elle ne touchera l'hyperbole qu'au seul point a. Car si elle rencontroit l'hyperbole en un autre point quelconque h, on auroit Dh = ac. (294): mais les 2 semblables, Dce, abd

donnent $bD : bE :: aD : ac$, or $bD = bE$ (cons), donc $aD = ac$. donc on auroit aussy $bD = ad$, ce qui est absurde. Donc la ligne Dc ne rencontre l'hyperbole qu'au seul point a.

fig. 50. Si on veut avoir une tangeante au point a du sommet, par ce point et le centre c tirez ac, et ab paralelle à l'assymptote cv: sur l'autre assymptote prenez $fb = cb$, par le point f et le point donné a ~~tirez~~ fag, elle sera la tangeante cherchée.

298. Il est clair, par la construction du problême, que une ligne Dc ~~...~~ terminée par ~~les extremités~~ les assymptotes ~~est~~ coupée en 2 egalemt. au point, où elle rencontre l'hyperbole est nécesssairemt. une tangeante.

fig. 56. 299. Réciproquement, si une ligne

De terminée par les asymptotes est tangente en quelque point a, elle sera coupée en 2 égalemt. au point de contact. Car p. avoir une tangente au point a, il faut mener aB parallele à l'asymptote Et, faire BD = Bt et tirer par les points D, a, la droite Dc qui sera tangente en a. (297). Or cette ligne ne differera point de la supposée, puisqu'elle aura 2 points communs avec elle. Mais la ligne Dac est coupée en 2 égalemt. au point a de contact, par (cons). Donc la supposée sera aussy coupée en 2 également au même point a.

Des propriétés de l'hyperbole raportée à ses Diamètres.

300. Un diamètre est une droite AB, ou Eq qui passe par le centre et qui se termine aux hyperboles opposées, (fig. 57)

Un diametre est determiné de grandeur par les 2 points où il rencontre la courbe de part et d'autre et ces points sont apellés l'origine de ce diametre.

On apelle diametre conjugué à un autre diamètre, celuy qui est parallèle aux ordonnées de celuy-cy, ou à la tangeante qui passe par son origine: Ainsy m p est un diametre conjugué au diamètre Lb, parceque m p est

parallèle à la tangente fg menée

par le point L, (fig. 58.)

Réciproquement Lh est diamètre

conjugué au diamètre mp.

301 Les lignes qm p, non parallèles

à la tangente fg et terminées à

l'hyperbole de part et d'autre

du diamètre sont des doubles

ordonnées à ce diamètre. (fig. 59

Il est évident qu'elles sont

toutes coupées en 2 également

par le diamètre prolongé autant

qu'il sera besoin. Car $fa = ag$.

(277), donc $mr = mt$. De plus

$rq = pt$ (294), donc $mq = pm$.(*)

Les parties am, ao du

diamètre comprises entre

l'extrémité de ce diamètre

et la rencontre d'une ordonnée

sont les abscisses correspondantes à

(*) De même (fig. 61) $fh = hg$ (297) donc $id = dn$. Mais $im = pn$ (294) donc $md = dp$.

ces ordonnées. —

Theo. 10, fig 57.

302. Un diamètre quelconque pq est coupé en 2 égalemt. au centre c. —

Demonstration.

De l'origine q du diamètre soit abaissée l'ordonnée qs au 1r. axe. Soit prise ct = cs, et soit tirée l'ordonnée pt, elle rencontrera le diamètre qp en un point p qui sera dans la courbe. Car (cons) les Δ cpt, cqs sont égaux, donc cp = cq, et pt = sq. Or les ordonnées égalemt. eloignées du centre, sont égales, puisque les hyperboles opposées sont égales et semblables, donc sq étant une ordonnée, son égalle pt en est une, et ainsy son extremité p est —

dans la courbe. –

Cor. 1er. fig. 60.

303. Si par l'extrémité h d'un 1er diamètre Lh, on tire une droite Dhe parallèle à la tangeante fg à l'autre extremité du même diametre, cette droite Dhe sera tangeante au point h de l'hyperbole opposée. Car les Δ semblables ehk, fcL donnent $cl:ch::fl:he$. or $cl=ch$, donc $fl=he$.

De même les Δ semblables Dch, clg donnent $cl:ch::lg:Dh$. or $cl=ch$ donc $lg=Dh$. mais $lg=fl$. (299), donc $eh=Dh$. donc De est tangeante à l'hyperbole. (298). –

Cor. 2e.

304. Un diamètre fait des angles obliques avec ses ordonnées ou avec les tangeantes menées par ses extremités. Car du point h soit menée

l'ordonnée hE au 1r axe : comme toutte tangeante rencontre l'axe en quelque point m, on aura le Δ hEm rectangle en E. donc l'angle hmE est aigu, et l'angle hmc obtu. donc l'angle chm est aigu, cequi fait voir que la tangeante ch est oblique au diam. d'où il suit que l'axe est le seul 1r. Diametre qui fasse des angles droits avec ses ordonnées.

Cor. 3e. fig 58.

305 Si de l'extremité d'un diamètre Lh, on mene 2 paralleles Lm, Lp aux asymptotes jusqu'à la rencontre d'une droite mp menée par le centre parallellement a la tangeante fg, la droite mp sera

égale à la tangeante fg, et coupée en 2 également au centre c. Car les droites cg, lp étant parallèles, de même que cp, gl, sont égales: mais fl = gl (298), donc cp = fl; et cm = fl, à cause du rectangle fmlc, donc cp = cm. Ensuite mp est égale à la tangeante fg, puisque leurs moitiés sont égales.

Cor. 1er.

306 Les droites lm, lp menées par les extrémités de 2 diamètres conjugués lh, mp, sont coupées en 2 également par les asymptotes aux points D E. Car lp étant parallèle à cg (cons), me : cp :: me : el. Or cm = cp (305), donc Em = el.

2°. mL etant paralelle a cD (cons), cp : cm :: Dp : DL. or cp = cm. donc Dp = DL. donc &c.

Cor. 8e. fig. 58.

307 Les asymptotes étant données, avec un point L de l'hyperbole; il sera facile de déterminer 2 diamètres conjugués dont l'un passera par le point L. Menez par le centre la droite Lh; — par le point L, menez Lm, parallele à l'asymptote cD. Prenez me = eL. tirez mp par le centre c, et faites cp = cm. Les droites Lh, mp seront les diamètres conjugués. car par le point L, menez fg parallelles à mp et terminées par les asymptotes. Les △ Leg, mce, sont égaux

conj). donc ~~g~~le = gl. or me = ~~l~~f à cause du rectangle mlef, donc fl = gl. Donc la droit fg est tangeante en l. (298) Donc mp qui luy est égale et paralelle est le diametre conjugué au diamètre lh (300). —

Coroll. 6e. fig. 50.

308 Il est visible que si 2 diamètres conjugués sont égaux dans une hyperbole, touts les autres le seront aussy, et l'hyperbole sera équilatere et aura ses assymptotes à angles droits. Car* puisqu'on suppose ac=af, et que fh=fh, les Δ cha fh qui ont le coté commun ah seront égaux ~~en tout~~. Donc l'angle fha = cha,

*Ou bien (fig. 38) puisqu'on suppose cm = cl, et que em = el, les Δ cme, cel qui ont le coté commun ce seront égaux en tout. Donc l'angle mec = cel, donc chacun est droit puisqu'ils sont de suite, donc les asymptotes sont perperpendiculaires l'une à l'autre ; puisque ml est parallele à cf. Donc &c ———

donc chacun est droit, puisqu'ils sont de suite. donc aussy les asymptotes sont perpend. l'une a l'autre, puisque Cg est paral à Da. —

309\. Il est encore évident que toutte hyperbole qui n'est pas équilatere ne peut avoir de diamètres conjugués egaux entre eux, et reciproquement. —

Cor. 7. fig. 61.

310 Si une corde mp est coupée en 2 égalemt. par un diamètre cd, elle est parallèle à la tangeante fg menée par le sommet h du diamètre car si dans ce cas mp n'étoit pas parallele à la tangeante fg l'on pourroit donc du point m, mener à

cette tangeante mo

paralelle m t laquelle tombant

audessus ou dessous de m p,

seroit coupée en 2 égalemt.

au point s par le diametre Ls

(301) et on auroit p d : dm

:: t s : sm, donc la corde

p t seroit paralelle à Ds ou

au diametre Ls. Donc une

parallele à un diametre

couperoit la courbe en 2 points;

ce qui est absurde, puisque

l'hyperbole s'eloigne toujours

de plus en plus de son

diametre. Donc par le

point m, on ne peut mener

une paralelle à la

tangeante fg differente de

m p. Donc m p est

nécessairement paralelle à fg.

Donc &c.

Cor. 8.e

311. Si 2 cordes paralleles mp, to sont coupées en 2 egalement par une droite Dr, cette ligne prolongée passera par le centre, et ce sera un diamêtre. Car si elle ne passoit pas par le centre C, on pourroit donc tirer du centre une autre ligne au point du milieu D de la corde mp: dès lors mp seroit paralelle à la tangeante au point où elle rencontreroit la courbe. (310). Donc to seroit aussy paralelle à cette tangeante et ainsy coupée en 2 également. par la ligne tirée du centre. (301) Mais (hypo.) to est

aussy coupée en 2 égalem.t par
dr, en un point différent de
celuy où la supposée la couperoit;
autrem.t ayant les 2 points communs
d, r elles ne seroient qu'une
même ligne. Donc to
auroit 2 points de milieu, ce qui
est absurde. Donc toutte ligne
dr qui passe par le milieu
des cordes paralleles, passe
par le centre de l'hyperbole.

Théo. 11e. fig. 62.

312. $\overline{m p}^2$ d'une donnée pm à
un diamètre quelconque ab est
au rectangle am × bm des abscisses
correspondantes comme $\overline{ce}^2$, du $\frac{1}{2}$
diamètre conjugué de est
au $\overline{ca}^2$ du $\frac{1}{2}$ diametre sur
lequel on prend les abscisses

Démonstration.

Soient ca, ou cb = a ; ce, ou cd = b ;

mp = y. cm = x. ainsy am = x − a : hm = x + a. Les △ semblables cag; cmt donnent ca : ag :: cm : mt. on a : cb :: x : $\frac{cbx}{a}$ = mt = mq. Ainsy pt, ou tm − mp = $\frac{cbx}{a}$ − y. et pq = qm + mq = $\frac{cbx}{a}$ + y. donc pt × pq = $\frac{cbcbxx}{aa}$ − yy = $\overline{ag}^2$ = cbcb. (281). d'où l'on tire cbcbxx − aayy = aacbcb, et par transposition cbcbxx − aacbcb = aayy. donc yy : xx − aa :: cbcb : aa. c'est à dire $\overline{mp}^2$: am × hm :: $\overline{ce}^2$: $\overline{ca}^2$. donc &c.

Cor. V.

313. D'où l'on tire yy = $\frac{cbcbxx - cbcb}{aa}$, ou xx − aa = $\frac{aayy}{cbcb}$: équation qui exprime la nature de l'hyperbole considerée par raport à ses diametres, et qui est ainsy que par raport à ses axes,

et qui peut servir égalemt. à la décrire quand l'angle des diamètres conjugués est donné.

Cor. 2°

314 Il suit que les propriétés des diamètres conjugués sont précisément les mêmes que celles des axes, par conséquent on doit en tirer les mêmes conséquences. Ainsy 1°. les quarrés des ordonnées aux diamètres sont entre-eux comme les rectangles des abscisses.

2°. Si on fait $ab : DE :: DE : p$, ou $2a : 2b :: 2b : p = \frac{2bb}{a}$, ce sera le paramètre du diamètre ab; ainsy on aura $4aa : 4bb :: 2a : p$. donc $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$, et si l'on met cette valeur dans l'équation au diamètre, on a $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$. d'où on tire $yy : xx - aa :: p : 2a$.

On fera la même chose pour le parametre du diametre conjugué au diametre ab.

Fig. 66. 3°. on trouvera p^r. une ordonnée Mq exterieure au 2e. Diametre. $\overline{Mq}^2 : \overline{cD}^2 + \overline{cq}^2 :: \overline{ca}^2 : \overline{cd}^2$. car de l'équation $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, on tire $xx : bb + yy :: aa : bb$.

4°. l'on pourra encore déterminer les tangeantes à un point quelconque M par le moyen d'un diamètre

Fig. 61. cb et de l'ordonnée menée par le même point M à ce diamètre, en faisant cette proportion.

(*)(270) cd : cb :: cb : ct.(*) car on peut concevoir qu'une hyperbole raportée à ses diamètres a été formée d'une autre hyperbole qui auroit eu ces diamètres p^r. axes

et dont toutes les ordonnées
et le 2d. axe auroient pris une
même inclinaison sur le 1er.
et alors la tangente à la
nouvelle hyperbole doit être
déterminée comme auparavant.

Theo. 12e. fig. 63.

315. Le parallelogramme construit
sur 2 Diametres conjugués
quelconques mn, pl est égal
au rectangle des 2 axes,
C'est-à-dire, rstu = fghk.(*)

Pr. construire le
parallelogramme des diamètres,
par un point quelconque
p de l'une des hyperboles, tirez
un diamètre pl, par les
points t, u, tirez les assymptotes
cf, cu (277). menez pm parallele
à cu. faites pq = mq. Par

* Comme dans l'ellipse (211).

le point M, et par le centre c menés mn, et faittes cm = cn, ce sera le 2.e diametre conjugué au 1.er pl. (307). par les points p, l menés les tangentes fg, hk, elles seront chacunes egales au 2.e diamétre Mn (305). Donc si on tire les lignes fk, gh, on aura la figure fghk qui est apellé le parallelograme circonscript des Diametres.

Demonstration.

Soit tirée BD. Le rectangle BCDt etant le quart du rectangle des axes, le Δ BCD en est la 8e partie. mais BD etant coupé en 2 egalement en x par l'assymptote cf (306). Le Δ BCx est la $\frac{1}{2}$ du Δ BCD. donc le Δ BCx est la 16e partie du rectangle des axes.

De meme le Δ fgh etant la $\frac{1}{2}$ du parallelograme des diametres, le Δ fcg en sera le $\frac{1}{4}$, et le Δ fcp la 8e partie, a cause de fp = pg. (295). et le Δ cpq la 16e partie a cause de fq = cq. (279).

Il reste donc a démontrer que le Δ BCx est égal au Δ cpq.

Les droites Bx, pq étant (const.) paralleles à l'assymptote cu, on a pq × cq = Bx × cx. — (290). Donc cq : cx :: Bx : pq. — abaissant les perpend. Bi, po sur cf, les Δ Bxi, opq sont semblables

et donnent $\mathcal{B}x : pq :: \mathcal{B}i : po$
donc $cq : cx :: \mathcal{B}i : po$. donc $cq \times op$
$= cx \times \mathcal{B}i$. ou $cq \times \frac{op}{2} = cx \times \frac{\mathcal{B}i}{2}$.
Ce qui fait voir que le $\triangle$ $\mathcal{B}cx$
est égal au $\triangle$ cpq. Or comme
ces $\triangle$ sont la 16.e partie de
leurs parallelogrames respectives,
il suit que ces parallelogrames
sont égaux.

Theo. 13.e Fig. 53.

316. Si des extremités m, n de 2
diamétres conjugués, on mene 2
ordonnées mp, nq à l'axe principal;
$\overline{cq}^2$ de la coupée comprise entre
le centre c et la rencontre
d'une des ordonnées est égal au
produit $ap \times \mathcal{B}p$ des abscisses
de l'autre ordonnée. (*)

Démonstration.

Conservant les mêmes denominations,
soit de plus $cq = z$. les $\triangle$
semblables tpm, cnq
donnent $\overline{cp}^2 : \overline{cq}^2 :: \overline{pm}^2 : \overline{nq}^2$.

(*) comme dans l'ellipse (191)

or $\overline{pm}^2 : \overline{nq}^2 :: ap \times bp : \overline{ca}^2 + \overline{cq}^2$.

(251). Donc $\overline{cp}^2 : \overline{cq}^2 :: ap \times bp : \overline{ca}^2 + \overline{cq}^2$. (*)

et analytiquement. $\frac{\overline{xx-aa}^2}{xx} : zz :: xx-aa : aa+zz$. Multipliant le 1.er raport par xx et divisant les antecedents par $xx-aa$, on aura $xx-aa : zzxx :: 1 : aa+zz$. Donc $zzxx = a^2x^2 - a^4 + x^2z^2 - a^2z^2$; d'où effaçant ce qui se detruit, transposant, et divisant tout par aa, il vient $zz = xx - aa$; c'est-à-dire, $\overline{cq}^2 = ap \times bp$. Donc &c.

(*) Car dc est le 1.er axe de l'hyperbole conjuguée neh, et ab en est le 2.e axe; donc (251) $\overline{qn}^2 : \overline{cq}^2 + \overline{ca}^2 :: \overline{cd}^2 : \overline{ca}^2$. Mais (240) $\overline{cd}^2 : \overline{ca}^2 :: \overline{pm}^2 : ap \times bp$. Donc $\overline{pm}^2 : \overline{qn}^2 :: ap \times bp : \overline{cq}^2 + \overline{ca}^2$.

(251).

317. La difference des quarrés de 2 diamètres conjugués quelconques est égale à la difference des quarrés des 2 axes. Car $aa : bb :: \overline{ca}^2 + \overline{cq}^2$ ou $\overline{cp}^2 : \overline{nq}^2$. (251).

ou $aa : bb :: xx : \frac{bbxx}{aa} = \overline{nq}^2$

or $\overline{cm}^2 = \overline{cp}^2 + \overline{pm}^2$. donc $\overline{cm}^2 =$ $xx - bb + \frac{bbxx}{aa}$. et $\overline{cn}^2 = \overline{cq}^2 + \overline{nq}^2$

Donc $\overline{cn}^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$.

N.ta Dans l'ellipse la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques est égale à la somme des quarrés des 2 axes (209)

donc $\overline{cn}^2 - \overline{cm}^2 = bb - aa$.
donc &c.

Probleme 5.e fig. 64.

318\. Trouver le centre, les axes, les parametres, les foyers et les assymptotes d'une hyperbole donnée.

Solution.

1.° Menéz à volonté dans l'hyperbole 2 paires de cordes mn, pt paralelles entre elles. Divisés les en 2 égalem.t au points r, s. par ces points du milieu r, s tirés les lignes rs qui etant prolongées vers c, doivent necessairem.t passer par le centre de l'hyperb. (311). ainsy le point c où se coupent ces 2 lignes est le centre de l'hyperbole.

2.° Du point c, comme centre, décrivéz un arc qui coupe l'hyperbole en 2 points p, m; tirez la corde de cet arc, et divisés la en 2 égalemt. au point

O. Du point c par le point O tiré l'indefinie c cs, cette ligne est le 1.er axe. Car la corde mp étant perpend. sur l'indefinie c cs, et coupée en 2 egalem.t par c cs, est une double ordonnée au diamètre c cs (301): or il n'y a que l'axe qui ait ses ordonnées perpend.s (304), donc le diametre est l'axe de l'hyperbole. —

3.° Le 1.er axe étant trouvé, vous aurez le 2.e (235)(*) —

4.° Les axes etant determinées vous trouverez les parametres (237) et les foyers. (236).

ensuite les asymptotes (277)

(*) Ou plutot (car suivant le § 235 on suppose les foyers donnés et qu'ici on les cherche) par l'origine de l'un des diametres cs (fig. 66) menez une ordonnée au 1.er axe qui vient d'être trouvé; et menez par le même point une parallele aux doubles ordonnées a ce diametre, elle sera tan=geante en ce point (301): prolongez la jusqu'à ce qu'elle rencontre le 2.e axe indéterminé en un point s — (fig. 46). Cherchez ensuite une moyenne proportionelle entre cs et l'ordonnée mp au 1.er axe, elle sera égale au $\frac{1}{2}$ second axe. Car $cs = \frac{bb}{y}$ (1270). Donc $y : b :: b : cs$. Donc &c.

Prob. 6.e fig. 65.

319. Trouver la surface de l'hyperbole hap, ou de sa moitié hal.

Solution.

Comme on n'a point encore de metode rigoureuse p.r resoudre ce probleme,

on y procede par aproximation.
Ainsy par le sommet a, tirez la
tangeante fg égale au 2e. axe ; menez
l'asymptote cB, cherchez
l'aire du Trapeze aBbf.
Ensuite tirez des lignes
TV, rs, mn &c paralleles à
la tangeante, et le plus proches
l'une de l'autre que vous pourez.
L'espace afbh sera divisé
en plusieurs portions qui ne
seront pas sensiblement
differentes de petits
trapezes. Evaluez
séparement chacun de ces
trapezes, leur somme donnera
à peuprès la surface de l'espace
afbh, otez la valeur de cet
espace du trapeze aBbf,
il restera la surface de la
½ hyperbole hak. —

Lemme, fig. 66

319\. Si on trace 2 cercles concentriques, la couronne circulaire x, ou l'espace compris entre les 2 circonferences concentriques est égale au cercle décrit avec le rayon DE moyen proportionel, entre la somme BD des rayons des cercles concentriques et la difference aD de ces rayons.

Démonstration.

Soient $ac = r$, $Dc = s$; ainsi $BD = r + s$ et $aD = r - s$. Soient a la circonf. du grand cercle, B celle du petit. Donc l'aire du grand est $\frac{ar}{2}$ et celle du petit est $\frac{Bs}{2}$. Soit encore x la circonference du rayon DE, et y le rayon DE, l'aire de son cercle sera $\frac{xy}{2}$. or il est evident que la

Autrement.

Soient $ac = r$
$dc = s$.
donc $ad = r - s$
$db = r + s$
Or $\overline{de}^2 = ad \times db = (r-s) \times (r+s) = r^2 - s^2$
mais les surf. des cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons, donc le cercle de = cercle r − cercle s. Donc &c.

couronne circulaire est egale au grand cercle moins le petit, c'est-a-dire qu'elle egale $\frac{ar}{2} - \frac{bs}{2}$. ainsy il faut démontrer que $\frac{ar}{2} - \frac{bs}{2} = \frac{xy}{2}$, ou que $ar - bs = xy$. or $\overline{De}^2 = bD \times aD$, ou $yy \cdot r+s \times r-s = rr-ss$. ensuite les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs rayons, c'est-a-dire $ar : bs :: rr : ss$, donc dividendo $ar-bs : bs :: rr-ss : ss$. mais $rr-ss = yy$. donc $ar-bs : bs :: yy : ss$. or les quarrés des rayons y, s sont entre eux comme les surfaces de leurs cercles, c'est-a-dire, $yy : ss :: xy : bs$. donc $ar-bs : bs :: xy : bs$. donc $ar-bs = xy$. donc &c.

Probleme 7e. fig. 65.

321 trouver la solidité de

L'hyperboloïde.

Solution.

Soit Bap l'hyperbole génératrice
de l'hyperboloïde. soient pB, cd
les assymptotes. fg tangeante au
sommet a. supposé que l'axe
aE est divisé en plusieurs parties
égales et que, par les points de
division, on a tirés plusieurs
paralelles a la tangeante ag
si on conçoit que la figure
aEDg tourne autour de
l'axe aE et qu'elle fasse une
revolution entiere, il est clair
que le trapeze aEDg
engendrera un cone tronqué
que la ½ hyperbole aph,
engendrera une hyperboloïde
et le rectangle agEo un
cylindre. Donc si avec la

Solidité de l'hyperboloide il faut d'abord chercher celle du cone tronqué et celle du cylindre ensuite retrancher la solidité du cylindre de celle du cône le reste sera la solidité de l'hyperboloide.

Démonstration.

1°. Le cône, le cylindre et l'hyperboloide sont composés d'une infinité de cercles paralleles, dont le nombre est exprimé par la hauteur a l. —

2°. Les rayons mi, mq engendreront dans leur revolution des cercles concentriques, et la couronne comprise entre leurs circonférences est égale au cercle dont le rayon est

moyen proportionnel entre la somme ~~de~~ ti et la difference iq de leurs rayons (309). Or la ligne ag est ce rayon moyen propornel: car $ti \times iq = ag^2$. (281) Donc ti : ag :: ag : iq. Mais ag est un cercle du cylindre aLgo, donc la couronne comprise entre les cercles mi, ng est égale à un cercle du cylindre aLgo. or comme chaque couronme comprise entre les cercles qui composent le cone tronqué et ceux qui composent l'hyperboloide sera toujours egale au cercle dont ag est le rayon, il suit que la somme de toutes ces couronnes est égale au cylindre aLgo. Donc le cone tronqué surpasse l'hyperboloide de tout le cylindre aLgo.

Donc pr avoir la solidité de l'hyperboloïde, il faut retrancher la solidité du cilindre de celle du cone tronqué et le restre sera la solidité de l'hyperboloïde.

§ 5. Des propriétés communes aux 3 sections coniques.

fig. 67, 68, 69.

377. Quand on considere les sections coniques sur un plan, on apelle Section conique toutte ligne telle, que les 2 distances de chacun de ses points l'une Mf à un meme point f, l'autre Mr à une ligne droite rDt soit toujours en meme raison ou dans un raport constant.

La droite rDt se nomme directrice, et le point f le foyer.

323. La Section est une Elipse, si Mf est plus petit que Mr : une hyperbole, si Mf est plus grande que Mr, une parabole si Mf est égale a Mr : un cercle, si Mr est infini par raport a Mf, parce qu'alors toutte les Mf deviennent égales entre elles. —

324. On apelle axe de la section une droite Df menée par le foyer f perpendiculairemt. à la directrice. Le point a compris entre f et D qui est tel que aD soit à af dans le raport constant propre à la section, s'apelle le sommet de la courbe, ou l'origine, l'extremité de l'axe. —

Probleme. IV.

325. Décrire les 3 sections coniques par une métode uniforme, ou trouver tant de points, M, M &c que l'on voudra de la section, quand la directrice Dr est donnée de position, avec le foyer f et le sommet a. —

Solution

Au sommet a, élevez perpendt à l'axe une droite ak = af.

tirez la droite indefinie DEL. par ~~tout~~ de points p, p &c., que l'on voudra de l'axe ap élevez perpend.t a cet axe, les droites pL, pL &c. terminées a la droite DEL. Ensuite du point f, comme centre avec un rayon égal a chaque pL, décrivez un arc de cercle qui coupera chaque L pL, en 2 points M, M qui ~~seront~~ faittes passer une courbe par tous les points M, M, elle sera section conique.

Demonstration.

Soit abaissée M r perpend. a la directrice Dt, on aura mr $= pD$, et par (cons) mf $=$ pL. donc dp; ou mr : pL ou mf :: ad : ae; ~~ad : a l~~, a cause des Δ semblables Dpl, lad; c'est-à-dire, que les distances mf et mr à la directrice et au foyer, sont dans la raison constante p.r chaque section, puisque ad, al, ou pD et pL sont dans cette meme raison (cons).

Cor. 1r.

326. La ligne aE, ou la distance af du sommet de la section au foyer est par raport à aD, distance du sommet à la directrice, égale dans la parabole, plus petite dans l'ellipse, plus grande dans l'hyperbole. donc une section conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon ~~lorsque~~ que son sommet est plus ou moins, ou autant éloigné du foyer que de la directrice. —

Cor. 2e.

327. L'angle aDE dans la parabole est de 45°; parceque aE = aD. il est plus petit dans l'elipse, parceque aE est plus petit que aD. il est plus grand dans l'hiperbole, parce que aE est plus grand que aD. —

Cor. 3e.

328. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on peut toujours trouver 2 foyers f, g, et 2 directrices Dt, Dr. car il n'y a pas plus de raison de prendre af vers le sommet a, que de prendre Bg = af vers l'extremité ~~le sommet~~ B du meme axe: il est donc indifférent de prendre l'une, ou l'autre. Or le foyer f construit la directrice Dt, en prenant aD et af dans la raison donnée qui exprime cette

des distance d'un point m
de la courbe au foyer et a
la directrice, donc aussi
on peut trouver une nouvelle
directrice Dr par raport au
sommet B, en prenant sur l'axe
prolongé s'il est necessaire
BD qui soit à Bg dans la même
raison. —

Cor. 2e.

329. Puisque les [illegible] pt, ou les fm correspondantes qui leurs sont
égales, croissent comme les élémens du Δ bBd, il suit
qu'elles sont en progression
arithmetique. donc la somme
de 2 pt prise à égale distance
des sommets A, B, doit être
égale à AL + Bb. Dans l'ellipse
cette somme est une vraye
somme, car les lignes pt
se trouvent toujours d'un
même côté par raport a

l'axe. Dans l'hyperbole au contraire la somme de 2 pl prises à égale distance des sommets A, B, est une vraye différence, parceque l'une de ces lignes est negative et l'autre positive, puisqu'elles se trouvent de differentes cotés de l'axe AB. —

Cor. 5e.

330. Comme dans l'ellipse, et dans l'hyperbole chaque point M peut etre déterminé par le moyen de la directrice Dt et du foyer f, et aussy par la directrice Dr et le foyer g il suit que dans l'ellipse, la somme des distances, mf, mg, et dans l'hyperbole la différence des mêmes lignes est toujours égale au 1r axe AB. Car (*) puisque le point m a eté determiné par le foyer f et la directrice Dt, on a mf = pl; or comme il a pû être également determiné par le foyer g, et la directrice Dr, on aura aussy mg = pl. Donc on aura pr. l'ellipse et pr. l'hyperbole mg ± mf = pl ± pl = ll = Kh = ab. —

Cor. 6e.

331. Ces 2 proprietés se trouvent dans la parabole: c'est-à-dire qu'en supposant à cette courbe 2 foyers, à une distance

* Autrement. Car chaque fm est égal à sa pl correspondante, et chaque mg à la pl qui est autant éloignée du sommet a, que la pl sur laquelle le point m est placé, est éloigné du sommet b. Or dans cas (329) pl ± pl = ab; donc mf ± mg = ab. —

infinie d'un de l'autre toutes 2 en dedans de cette courbe comme dans l'élipse ou l'un en dedans, et l'autre en dehors, comme dans l'hyperbole. la somme des distances fm, mg dans le 1er. cas, et leur différence dans le 2e, sera toujours égale a cet axe qui est infini

Cor. 7e.

332. De la Construction générale des sections coniques, il suit que toutes celles de meme espece, par exemple toutes les Ellipses qui seront construites, ensorte que les distances aD de leur sommet a leurs directrices soient proportionelles aux distances af des memes sommets au foyer le plus proche, toutes ces sections seront semblables.
car alors toutes les Dp, les pl, ou les fm d'une section seront proportionelles aux Dp, aux pl, ou aux fm homologues dans l'autre, et ainsy les dimentions homologues de ces 2 sections seront proportionelles, ce qui les rendra

des figures semblables. —

Cor. 8e.

333. Donc 2 Elipses ou 2 hyperboles sont semblables quand les axes de l'une sont proportionels aux axes de l'autre, ou que les distances des sommets sont proportionelles aux intervalles des foyers. Toutes paraboles sont des figures semblables, puisqu'on a toujours $aD = af$.

Probleme. 9e

332. Connoissant le raport constant qui doit regner entre les mf et les mr, trouver les sommets de chaque section conique, ou déterminer la longueur de l'axe principal. —

Solution.

Par le point f menez fLm perpend.e à l'axe fD: sur laquelle prenez une partie fL qui soit à fD dans la raison donnée. Tirez ensuite l'indéfinie DL. Du foyer f menez jusqu'à la rencontre de DL, 2 droites fl, fh qui fassent avec l'axe, chacune un angle de 45°. des points l, h abaissez sur l'axe les —

perpend. la, bb qui donneront le sommet a, b demandé. —

Démonstration.

a cause du Δ rectangle isocelle fla, fbb, af=al. bf =bb. mais à cause des Δ semblables Dfl, Dal, Dbb, on aura fl : fD :: al ou af : aD, ou :: bb ou bf : bD. c'est-a-dire que les distances fa, aD : fb, bD des points trouvés a, b aux foyers et a la directrice sont dans la raison constante puisque fD, fl sont par (cons) dans la meme raison. —

Cor. 1r.

335. Dans l'ellipse la ligne fh rencontre DL au dessous du 1r. sommet a parceque l'angle bfh est plus grand que bDh. dans la parabole la ligne fh est paralelle a DL parceque l'angle bDL=bfh. dans l'hyperbole, la ligne fh rencontre DL au dessus du sommet a, parceque l'angle Dfh est plus petit que aDL. —

Cor. 2d.

336 Comme dans la parabole, fh se trouve paralelle à DL, (335) la parabole ne peut avoir qu'un sommet ou a, et l'axe Df est infini, parceque fh etant paralelle à DL ne peut la rencontrer qu'a une distance infinie de part et d'autre. — Mais si on considère 2 paralelles comme concourantes à

une distance infinie et que d'ailleurs il n'y a pas plus de raison d'imaginer le point de concours d'un coté plutot que d'un autre, il suit que la parabole peut etre mise indifferement dans le genre Elliptique, ou dans le genre hyperbolique. —

Cor. 3e.

337. Dans l'ellipse, les 2 sommets A, B sont a une distance finie l'un de l'autre et ~~[illegible]~~ parconsequent l'axe AB est déterminé de longueur, ~~puisque cet axe est terminé au de la du foyer f~~ Dans la parabole le 2e sommet est infiniment éloigné du 1er ou l'axe est infini dans l'hyperbole, l'axe est aussy déterminé de longueur et les 2 sommets sont posés à contre sens. C'est ce que les geometres ont coutume d'exprimer, en disant que le 2e sommet est éloigné plus qu'à l'infini du 1er. — —

Cor. 4e.

338. De ces 3 choses, le foyer f, les sommets A, B et la directrice, 2 etant données, la 3e sera toujours connue. car

1o. le foyer et la directrice etant donnée on trouve les sommets. (334)

2o. Si la directrice et les sommets avec le rapport qui doit regner entre les mf et les mr que l'on suppose toujours connues, sont donnés, par le point A tirez AE qui soit à AD dans ce rapport constant. ensuite menez DE et la droite Ef qui fasse avec AE un angle de 45°; le

point f sera le foyer. —

3°. Si les sommets a, B et le foyer f sont donnés élevez à l'axe les perpend. ~~at~~ aE = af et bh = bf. Par les extremités E, h de ces droites tirez Eh, qui rencontrera l'axe en un point D qui sera un point de la directrice. —

Prob. 3°.

339. Connoissant le grand axe aB d'une section conique avec le raport qui doit regner entre les mf et les mr, trouver l'expression de la distance af du foyer f au sommet a.

Solution.

Soit le grand axe aB = 2a. Soit désigné le raport des mf aux mr par celuy de m à n. Soit af = x. Bf sera $2a \mp x$. Puisque le point a est un point de la courbe, on aura m : n :: af : aD; ou :: $x : \frac{nx}{m}$ = aD. donc BD sera $2a \pm \frac{nx}{m}$. Mais le sommet B étant aussy un des points de la courbe, on aura encore m : n :: Bf : BD. ou :: $2a \mp x : 2a \pm \frac{nx}{m}$ = BD. donc

$x : \frac{nx}{m} :: 2a-x : 2a \pm \frac{nx}{m}$, ou $m : n :: (2a-x) \times m : 2am \pm nx$, — d'où l'on tire $x = a \times \frac{n-m}{n}$ —

Cor.

340. Si m est plus petit que n comme cela arive dans l'ellipse la valeur de x sera positive. Si au contraire m est plus grand que n, comme cela arive dans l'hyperbole, — x devient negative et dans ce cas il faut prendre af au dela du sommet a. Ensuite si on suppose $m=n$. L'expression $a \times \frac{n-m}{n}$, devient $a \times \frac{0}{m}$. ou en faisant $n=1$, $a \times \frac{0}{1}$. Dans ce cas la courbe est une parabole et la grandeur ab est infinie. —

Theoreme. 1.er

341. Dans une section conique l'intervalle fg des 2 foyers est au grand axe ab, dans la raison de M à N, c'est-à-dire, fg : ab :: M : n ; ou $x : 2a :: m : n$. —

Démonstration.

On a prouvé (325) que bf : bD :: ae : aD :: m : n. donc bf - ae : bD - aD :: m : n. or par la construction du N.o 325, ae = af = bg. et ainsy bf — ae = fg. de même bD - aD = ab, donc on aura fg : ab :: m : n. —

Cor. 1.er

342.e Dans le cercle la quantité M est infiniment petite

par raport a la quantité r.
donc l'intervalle fg des foyers
y est infinimt. petitte par raport
a l'axe, c'est-a-dire qu'il est nul.
Dans la parabole $m = n$, et
ainsy on aura $fg = ab$, c'est-à-dire
que l'intervalle des foyers est égal
a l'axe et parconsequent infini.
Dans l'ellipse m est plus
petit que r, d'où il suit
que l'intervalle des foyers fg sera
plus petit que l'axe.
Dans l'hyperbole, m est plus
grand que r, d'où il suit que
l'intervalle des foyers sera plus
grand que l'axe.

Corol. 2e.

343 Il suit que le cercle peut être regardé comme une section dont les foyers se réunissent en un seul et même point, qui est le centre; que l'ellipse peut être regardée comme un cercle dont les foyers se sont éloignés du centre d'une quantité finie, laquelle s'apelle excentricité. Que

La parabole est une ellipse dont les foyers se sont éloignés infiniment l'un de l'autre ~~Quitre~~ L'hyperbole est une ellipse dont les foyers se sont éloignés plus qu'à l'infini l'un de l'autre et se sont placés à contre-sens. —

Comme le centre est toujours placé entre les 2 foyers, il arrive que dans la parabole il n'y a point de centre; que dans le cercle et l'ellipse il est en dedans de la courbe et que dans l'hyperbole, il est en dehors de la courbe, et placé entre les sommet des hyperboles opposées. —

Probleme. 4e.

314. Connoissant dans l'ellipse et dans l'hyperbole le grand axe ab et la distance af du sommet a au foyer, trouver la distance ad de l'origine D de la directrice au meme sommet a. —

Solution.

Soit $ab=2a$. $af=c$. $aD=x$. BD sera $2a\pm x$. le signe superieur est toujours pr. l'élipse et l'inferieur pr. l'hyperbole $af=aE=c$. Bf ou Bh sera $2a\mp c$. Or à cause des $\triangle$ semblables DaE, DBh, $aE:aD$, :: $Bh:BD$, ou $c:x::2a\mp c:2a\pm x$. D'où l'on tire $x=\frac{ac}{a\mp c}$. —

Corollaire. —

345. dans la parabole, comme $a=\infty$, la quantité finie $\mp c$ combinée avec a par addition ou soustraction, n'augmente, ni ne diminue le denominateur qui se réduit à a. donc $x=\frac{ac}{a}=c$. comme on le le scait d'ailleurs.

Prob. 5e.

346. trouver l'équation aux sections coniques, en comptant les abscisses $ap=x$ du sommet a.

Solution.

les Δ semblables $da\ell$, $Dp\ell$ donnent $aD:a\ell::Dp:p\ell$, et analytiquement $\frac{ac}{a\mp c}:c::\frac{ac}{a\mp c}+x:p\ell=\frac{ac+ax\mp cx}{a}$. ensuite dans tous les cas $pf=\mp x\pm c$ pr. l'ellipse et pr. l'hyperbole. donc a cause du Δ rectangle fpm et de $fm=p\ell$, on a $\overline{pm}^2=\overline{fm}^2-\overline{fp}^2$; ou $yy=\frac{ccxx}{aa}\mp\frac{2ccx}{a}\mp\frac{2cxx}{a}+4cx=\frac{ccxx\mp 2accx\mp 2acxx+4a^2cx}{aa}$. d'où (*) l'on tire cette nouvelle Equation: $yy=\frac{2ax\mp xx\times 2ac\mp cc}{aa}$. Mais le Δ rectangle $cg\ell$ donne $\overline{g\ell}^2=\overline{cg}^2+\overline{c\ell}^2$, ou $aa=aa-2ac+cc+bb$, d'où l'on tire $2ac-cc=bb$. donc en substituant bb à la place de $2ac-cc$, il vient $yy=\frac{2ax\mp xx}{aa}\times bb$, ou $yy=\frac{2bbx}{a}\mp\frac{bbxx}{aa}$. Telle est l'équation aux axes de l'ellipse et de l'hyperbole —

(*) ou bien, substituant dans cette équation à la place de cc sa valeur $=\pm 2ac\mp bb$ (à cause du Δ rectangle cga dans l'ellipse, et du Δ rectangle bcD. dans l'hyperbole) puis réduisant, on a $yy=\frac{2bbx}{a}\mp\frac{b^2x^2}{aa}$

Cor. 1er.

347. Si dans la 1ère équation $yy = \frac{ccxx}{aa} \mp \frac{2ccx}{a} \mp \frac{2cxx}{a} + 4cx$, on suppose $a = \infty$, comme il arrive dans la parabole, — alors toutes les termes s'évanoüissent et il ne reste que $4cx$, — donc l'équation à la parabole est $yy = 4cx$, et en faisant ~~p~~ $4c = p$, on aura $yy = px$.

Cor. 2e.

348 De ce que $bb = 2ac \mp cc$, on a $bb = c \times 2a \mp c = af \times fs$, il suit que le $\frac{1}{2}$ du 2e axe est moyen proportionelle entre les distances d'un foyer aux 2 sommets. —

Cor. 3e.

349. L'équation aux axes $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$ donne $yy : 2ax \mp xx :: bb : aa$. C'est-à-dire dans l'ellipse et l'hyperbole les quarrés des ordonnées à l'axe principal sont au produit de leurs abscisses, comme le quarré du 2e $\frac{1}{2}$ axe est au quarré du $\frac{1}{2}$ axe principal

Cor. 4e.

350. Comme la raison de bb à aa qui exprime le rapport du quarré d'une ordonnée au rectangle $ap \times bp$:

$=2ax \mp xx$ est une raison constante, il est évident que les quarrés des ordonnées sont entre-eux comme les produits des abscisses correspondantes.

Cor. 5e.

351. Dans la parabole, à cause du paramètre constant p, le rapport de yy à x est constant. Donc dans la parabole les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses.

Prob. 6e.

152. Trouver l'expression du paramètre de l'axe principal d'une section conique.

Solution.

Si dans l'équation $yy = 4cx \mp \frac{2cxx}{a} \mp \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$, on suppose $x = c$, on aura $yy = 4cc \mp \frac{4c^3}{a} + \frac{c^4}{aa}$. Extrayant les racines, on aura $y = 2c \mp \frac{cc}{a}$. Telle est la valeur de l'ordonnée qui passe par le foyer f, son double est la valeur du paramètre p.(*) On a donc $p = 4c \mp \frac{2cc}{a}$.

Cor. 1r.

353. Dans la parabole à cause de $a = \infty$, on a $p = 4c$. (voyez aussi § 60).

Cor. 2e

354 Le paramètre de l'axe principal d'une section conique

(*) On a déjà vu la même chose § 59, 137, 245.

est quadruple de la distance du sommet au foyer dans la parabole, plus que le quadruple dans l'hyperbole moins que le quadruple dans l'élipse. (Voy. 60, 136, 260 où l'on a donné la même chose)

Cor. 3e.

355. Si dans l'équation $p = 4c \mp \frac{2cc}{a}$, on substitue à cc sa valeur $\pm 2ac \mp bb$, on aura $p = \frac{2bb}{a}$ ou $p = \frac{4bb}{2a}$. d'où l'on tire cette proportion, $2a : 2b :: 2b : p$. ce qui fait voir que le paramètre de l'axe principal est une 3e proportionelle à cet axe et au 2d. — (Voyez 120, 237)

Prob. 7e.

356. Trouver l'équation qui contienne la relation du paramètre de l'axe principal aux fonctions des abscisses et des ordonnées d'une section conique. —

Solution.

puisque $p = \frac{2bb}{a}$. donc $\frac{1}{2}ap = bb$. donc en substituant cette valeur dans l'équation génale $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$, on aura $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$. —

Cor. 1er.

357. Dans la parabole à cause de $a = \infty$, on a $yy = px$. et c'est là l'équation à la parabole, la même que la précédente —

Cor. 2e

358. L'équation gnale au paramètre $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$, ou $2ayy = 2apx \mp pxx$, donne cette proportion, $yy : 2ax \mp xx :: p : 2a$. Or $2ax \mp ax = 2a \mp x \times x = BP \times AP$, donc on gnal les quarrés des ordonnées à l'axe principal des élipses et des hyperboles sont au produit de leurs abtisses, comme le paramètre est à l'axe principal.

Cor. 3e

359. Dans l'équation $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$, la fraction $\frac{pxx}{2a}$ donne $2a : p :: x : \frac{px}{2a}$. Donc le rectangle $2ap$, fait sur les 2 1ers termes de cette proportion est semblable au rectangle $\frac{pxx}{2a}$, fait sur les 2 derniers, puisque ses cotés sont proportionels. Donc dans une section conique, le quarré d'une ordonnée a l'axe principal, est par raport au produit px de l'abscisse par le paramètre de cet axe, égal dans la parabole, plus petit dans l'élipse, et plus grand dans l'hyperbole. De plus dans ces 2 dernieres courbes, le deffaut ou l'excès désigné par $\frac{pxx}{2a}$, est toujours un rectangle semblable a celuy $2ap$ du 1er axe par son parametre, lequel a pr. cotés x et $\frac{px}{2a}$. C'est à cause de cette proprieté que les Anciens ont donné aux 3 Sections Coniques les noms de parabole, d'ellipse et d'hyperbole qui signifient respectivement, egalité, déffaut et excès.

Cor. 4e.

360 Si on suppose les 2 axes de l'ellipse et de l'hyperbole égaux entre eux : ce qui donnera un cercle dans le 1er cas, et une hyperbole équilatérale dans le 2e, le paramètre sera aussy égal à l'un ou à l'autre axe ; et l'équation $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$ devient $yy = px \mp xx$ (*) qui est ~~une~~ l'équation à une hyperbole équilatérale, ou à un cercle, pourvû que les ordonnées soient à angles droits, comme on le suppose dans le cercle.

Notie

361. Comme on a fait voir que les propriétés des diamètres conjugués sont précisement les mêmes que celles des axes, on ne s'arretera pas à prouver que leurs équations doit aussy être la même, en comptant les abscisses de l'origine de chaque diamètre.

Probleme. 8e. fig. 39 et 46

362. Trouver l'expression de la soutangeante pt, ~~...~~ en comptant les abcisses du sommet a.

Solution.

On a vû, dans l'élipse et dans l'hyperbole, (158, et 270) que $cp : ca :: ca : ct$, donc en mettant les valeurs analytiques on aura $a \mp x : a :: a : \frac{aa}{a \mp x} = ct$. Donc si dans l'ellipse on retranche cp de ct

(*) puisqu'alors on a $p = \frac{4aa}{2a} = 2a$.

ou dans l'hyperbole et de cp,
on aura $pt = \frac{2ax \mp xx}{a \mp x}$.

Cor. 1er

363. Dans la parabole $pt = 2x$. car a cause de $a = \infty$, on a $pt = \frac{2\infty x \mp xx}{\infty \mp x} = \frac{2\infty x}{\infty} = 2x$.

Cor. 2e

364. Dans une section conique la soutangeante est a l'égard du double de l'abcisse egale dans la parabole, plus grande dans l'élipse, plus petitte dans l'hyperbole. car mettant la formule en proportion, on trouve pr l'élipse, $pt : 2a-x :: x : a-x$ et multipliant la 2e raison par 2, on a $pt : 2a-x :: 2x : 2a-2x$. or $2a-x$ est plus grande que $2a-2x$. donc pt est plus grande que $2x$. dans l'hyperbole $pt : 2a+x :: 2x : 2a+2x$. or $2a+x$ est moindre que $2a+2x$, donc pt est plus petitte que $2x$.

Cor. 3e

365. $pt - ap = at$. donc $at = \frac{ax}{a \mp x}$. et dans la parabole $at = x$. on voit donc que at est a l'égard de l'abcisse, egale dans la parabole, plus grande dans l'élipse plus petitte dans l'hyperbole.

Prob. 9. fig. ~~76~~ + 77, 78.

366 Trouver l'expression de la sous normale pt.

Solution.

gn et fh étant perpend. à mt sont paralleles à la normale mt, et les △ fmt, fng sont semblables. Donc fn : gf :: mn, ou mg : gt, ou $2a : 2a \mp 2c :: x + c \mp \frac{cx}{a}$ (*) : $gt = x + c \mp \frac{cc}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$. or $pt = gt - gp$, et $gp = x - c$. Donc $pt = 2c \mp \frac{cc}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$. Substituant (152) $\pm 2ac \mp \frac{1}{2}ap$ à la place de cc, et réduisant, on aura $pt = \frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a}$: et si on met $\frac{2bb}{a}$ à la place de p, on aura $pt = \frac{bb}{a} \mp \frac{bbx}{aa}$.

Cor. 1re.

367. Dans la parabole la sous normale est la $\frac{1}{2}$ du parametre et ainsi toujours constante, à cause de $a = \infty$; ce qui donne $pt = \frac{1}{2}p$.

Cor. 2e.

368. dans une section conique la sous normale est par raport

* Car dans l'ellipse $fm + mg : fg :: fp - gp : fm - gm$ (538 géom), ou $2a : 2a - 2c :: 2a - x + c - x + c$, ou $2a - 2x : fm - gm = 2a - 2x - 2c + \frac{2cx}{a}$. Donc $mg = a - a + x + c - \frac{x}{a} = x + c - \frac{cx}{a}$ (245 calcul). Dans l'hyperbole, ayant supposé une droite $ms = mg$ portée de m de l'autre côté de l'ordonnée mp, ce qui donne $ms = mg$; on a $fm - ms : fg :: fs : fm + ms$, ou $2a : 2a + 2c :: 2a + 2x : 2a + 2c + 2x + \frac{2cx}{a} = fm + mg$. Donc $mg = c + x + \frac{cx}{a}$.

au $\frac{1}{2}$ paramètre de l'axe principal, égale dans la parabole; plus petitte dans l'ellipse; plus grande dans l'hyperbole

Probleme .10e.

369. Trouver l'expression de la normale mt.

Solution

Dans le △ rectangle mpt, on a $\overline{mt}^2 = \overline{pm}^2 + \overline{pt}^2$.

donc $mt = \sqrt{\frac{a^2b^4 \mp 2ab^4x + b^4x^2 + 2a^3b^2x}{aa} \frac{\mp a^2b^2x^2}{aa}}$. en y faisant entrer le paramètre, on aura $\overline{mt}^2 = \frac{4a^2px \mp 2apxx + aapp}{4aa} \frac{\mp 2appx + pp^2x^2}{4aa}$.

Cor. 1r

370. Dans la parabole on $a = \infty$, on a $\overline{mt}^2 = px + \frac{1}{4}pp$.

Cor. 2e.

371. Si on fait $x = 0$ dans la 2e. formule, elle se réduit a $\overline{mt}^2 = \frac{1}{4}pp$. donc $mt = \frac{1}{2}p$. si on fait $x = a$ dans la 1re formule, on aura pr. l'ellipse $mt = 0$. ce qui fait voir 1°. que dans toute section conique

la normale est au moins egale a la $\frac{1}{2}$ du paramètre ou a l'ordonnée qui passe par le foyer, puisque si on prend le ~~f~~ point M si près du sommet que l'abscisse correspondante a l'ordonnée mp soit infiniment petitte, ou nulle, la normale egale $\frac{1}{2}p$.

2°. que dans l'elipse la normale ne peut exceder la $\frac{1}{2}$ du petit axe.

Probleme 11°.

372. trouver l'expression de al, c'est a dire de la distance du sommet a à la rencontre de la normale ml.

Solution.

$al = ap + pl = \frac{aBB \mp BBx + aax}{aa}$

$= \frac{ap \mp px + 2ax}{2a}$. et dans la parabole $al = \frac{1}{2}p + x$.

Cor.

373. Si on fait $x=0$, on aura $al = \frac{1}{2}p$. et parceque les quantités a, p sont additives et constantes dans les formules de la parabole et de l'hyperbole, il est clair que plus x sera grand, plus al sera grand dans ces 2 sections. D'où l'on voit que la

normale tombe toujours au dela du foyer par raport au sommet et jamais entre le sommet et le foyer le plus proche.

On trouvera de meme $BL = \frac{2a^3 \mp aax \mp abb + BBx}{aa}$.

Probl. 12

374. Trouver l'expression de la tangeante tm.

Solution

$\overline{tm}^2 = \overline{pm}^2 + \overline{pt}^2$. donc $\overline{tm}^2 = \frac{2abbx \mp bbxx}{aa} + \frac{4a^2x^2 \mp 4ax^3 + x^4}{aa \mp 2ax + xx}$.

ou $\overline{tm}^2 = \frac{px \mp px^2}{2a} + \frac{4a^2x^2 \mp 4ax^3 + x^4}{a^2 \mp 2ax + xx}$.

et dans la parabole, $\overline{tm}^2 = px + 4xx = 4ac \times ap + 4\overline{ap}^2$. (fig. 78)

Theo. 2e. fig 70 et 70*.

375. Le quarré du petit $\frac{1}{2}$ axe dans une section conique est egal au rectangle de 2 perpend. sur la tangeante l'une menée d'un point de l'axe au point de contingence, et qui est par consequent la normale; l'autre menée du centre a la tangeante, c'est-a-dire que l'on aura $BB = 2m \times cN$.

Démonstration.

Soit prolongé le petit $\frac{1}{2}$ axe cB jusqu'à la rencontre de la tangeante. Soit menée l'ordonnée mp au grand axe et l'ordonnée mg au petit. Les Δ pmL, nCD, seront semblables. Donc on aura pm, ou cg : mL :: nc : cD. donc $mL \times cn = cg \times cD = \overline{cB}^2 = BB$. car $cg \times cD = \overline{cB}^2$, a cause de cg : cB :: cB : cD (176, et 270). —

Dans la parabole, cn est infinie a cause du centre infinimt. eloigné du Sommet. d'où il suit que dans la parabole, on à BB $= Lm \times \infty = \infty$. Ce qui fait voir que le quarré du petit axe et par conséquent le petit axe luy même est infini.

Theo. 3e fig. 70, 71.*

376. Le quarré du petit $\frac{1}{2}$ axe dans une section conique est égal au rectangle de 2 perpendicul. élevées des 2 extremités du grand axe, jusqu'à la rencontre de la tangeante, c'est-à-dire, que $AQ \times Lr = BB$.

Démonstration.

Les 2 Δ tao, tpm semblables donnent $ta : ao :: tp : pm$. — de même, les Δ semblables tlr, tcD donnent $tl : lr :: tc : cD$. or x^ant par ordre ces 2 proportions, on aura $ta \times tl : ao \times lr :: pt \times ct : pm$ ou $cg \times cD$. mais $ta \times tl = pt \times ct$. car (169 et 271) $ta = \frac{\pm aa \mp ax}{x}$, et $tl = \frac{\pm aa \mp ax}{x} + 2a = \frac{-aa - ax + 2ax}{x} = \frac{aa + ax}{x}$. donc $ta \times tl = \left(\frac{\pm aa \mp ax}{x}\right) \times \left(\frac{aa + ax}{x}\right) = \frac{\pm a^4 \mp a^3x \pm a^3x \mp a^2x^2}{xx}$ $= \frac{\pm a^4 \mp a^2x^2}{xx}$. maintenant $pt = \frac{\pm aa \mp xx}{x}$ (166 et 268). et $ct = \frac{aa}{x}$. (168 et 270). donc $pt \times ct = \left(\frac{\pm aa \mp xx}{x}\right) \times \frac{aa}{x} = \frac{\pm a^4 \mp a^2x^2}{xx}$. donc $pt \times ct = ta \times tl$. donc aussy $ao \times lr = cD \times cg = BB$. (176 et 270). donc &c.

Theo. 4e. fig. 71

377. Le quarré du petit ½ axe dans une section conique est egal au rectangle de 2 perpendiculaires menées des

foyers sur la tangeante, c'est-à-dire si $gh \times gh = em \times cn$.

Demonstration pour l'Ellipse.

les △ semblables tfi, tem, donnent $tf : fi :: te : em$. de même les △ semblables tgh, tcn, donnent $tg : gh :: tc : cn$. donc multipliant par ordre ces 2 proportions, on aura $tf \times tg : fi \times gh :: te \times tc : em \times cn$. or $tf \times tg = te \times tc$.

car $tf = ct - cf = \frac{aa}{x} - c = \frac{aa - cx}{x}$.

et $tg = ct + cg = \frac{aa}{x} + c = \frac{aa + cx}{x}$.

Donc $tf \times tg = \frac{aa - cx}{x} \times \frac{aa + cx}{x}$,

$= \frac{a^4 - ccxx}{xx}$. de même $te = pt + pe$

$= \frac{aa - xx}{x} + \frac{bbx}{aa}$. et $ct = \frac{aa}{x}$.

donc $te \times ct = \left(\frac{aa - xx}{x} + \frac{bbx}{aa}\right)$

$\times \frac{aa}{x} = \frac{a^4 - a^2x^2}{xx} + \frac{a^2b^2x}{aax} = \frac{a^4 - a^2x^2}{xx}$

$+ bb = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2 x^2}{xx}$.

or $bb = aa - cc$. donc substituant, on aura $te \times ct = \frac{a^4 - a^2x^2}{xx}$

$\frac{+ a^2x^2 - c^2x^2}{xx} = \frac{a^4 - c^2x^2}{xx}$. donc $te \times tc = tf \times tg$, et par conséquent $fi \times gh = em \times cn = bb$. donc &c.

Démonstration p.r l'hyperbole.

Comme la précédente, en opérant sur la figure 71*.

Theo. 8e.

378. Les perpend. menées du foyer sur les tangeantes aux differens points de la courbe croissent dans la parabole selon la proportion des racines des rayons vecteurs. Dans l'elipse elles croissent dans une plus grande raison, dans l'hyperbole, elles croissent dans une moindre raison

Démonst. pr. la parabole.

on a démontré (79) cette proposition pr la parabole.

Démons. pr. l'elipse. fig. 72.

Soient les tangeantes hl, rq aux points m, t. du même foyer. f soient abaissées sur ces tangeantes les perpend. fh, fr: ces perpend. croiteront davantage l'une par raport à l'autre que dans la raison des racines quarrées des rayons vecteurs fm, ft tirées du foyer f aux points de contact. m, t; c'est-à-dire, que fh est plus ~~petit~~ grand par raport à fr que $\sqrt{fm}$ par raport à la $\sqrt{ft}$. Il faut donc prouver que $\frac{fh}{fr}$ est plus ~~petite~~ grand que $\frac{\sqrt{fm}}{\sqrt{ft}}$.

De l'autre foyer g, soient abaissées les perpendiculaires gl sur hl, et gq sur rq. Les △ rectangles fhm, glm sont semblables, puisque l'angle fmh = gml. (152) Donc fm : fh : gm : gl. ainsi $gl = \frac{fh \times gm}{fm}$. Donc en multipliant par fh, on aura $gl \times fh = \overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm}$. or $gl \times fh = \overline{cc}^2 = bb$.

(377) Donc $\overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm} = bb$,

et $\overline{fh}^2 = bb \times \frac{fm}{gm}$. Or bb étant

une quantité constante, on

aura $\overline{fh}^2 = \frac{fm}{gm}$. Ainsy si gm

étoit une quantité constante,

ou ~~auroit~~ si l'on avoit $\overline{fh}^2$

$= \frac{fm}{1}$; alors $\overline{fh}^2$ seroit dans

le raport constant du

rayon vecteur fm; mais

gm diminue quand fm

augmente. donc la raison

$\frac{fm}{gm}$ est plus grande que $\frac{fm}{1}$.

donc $\overline{fh}^2$ croit en plus grande raison que fm, et fh en plus grande raison que la racine quarrée de fm.

Démonst. p. l'hyperbole. fig. 73

Soient les tangentes ~~fh~~ m, p aux points m et du foyer f soient abaissées sur ces tangentes les perpendic. fr, fh, elles croiteront moins l'une par raport à l'autre, que dans la raison des racines quarrées

des rayons vecteurs ft, fm.. c'est-à-dire, que fh est plus petit par raport à fr que $\sqrt{fm}$ par raport à $\sqrt{ft}$. Il faut donc prouver que $\frac{fh}{fr}$ est plus petit que $\frac{\sqrt{fm}}{\sqrt{ft}}$.

De l'autre foyer g, ebiant tirées les lignes gt, gm, aux points de contacte. l'angle fmh etant egal a l'angle gmp (262) les Δ rectangles fhm, gmp sont semblables. donc $fm : gm :: fh : gp = \frac{fh \times gm}{fm}$. et multipliant par fh, on aura $gp \times fh = \overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm}$. or $gp \times fh = \overline{ce}^2 = bb$. (375) donc $\overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm} = bb$. et $\overline{fh}^2 = \frac{bb \times fm}{gm}$. or bb etant une quantite constante, on aura $\overline{fh}^2 = \frac{fm}{gm}$. donc si gm etoit une quantité constante; ou si l'on avoit $fh = \frac{fm}{1}$. alors $\overline{fh}^2$ croiteroit

dans la même raison que fm. Mais dans l'hyperbole gm croit en meme tems que fm. donc la raison $\frac{fm}{gm}$ est plus petitte que $\frac{fm}{1}$ et par consequent fh^2 croit en moindre raison que fm et fh en moindre raison que $\sqrt{fm}$. Donc &c.

379. Si on fait passer un cercle par 3 points infiniment proches sur le perimètre d'une section conique quelconque, ce cercle est nommé osculateur, et le rayon du même cercle est aussy nommé rayon osculateur, ou rayon de courbure, parceque la courbure de ce cercle est egale à celle de la section conique au point commun avec le cercle.

Prob. 13e. fig. 74, 75.

380 Déterminer le rayon de courbure en un point quelconque d'une section conique.

Solution.

Ayant tiré par le point donné le diamètre Mg, et son conjugué hh, avec les axes AB, DE; soit $Mg = 2g$. Le diamètre conjugué $hh = 2h$. La perpendiculaire $Mr = n$. L'ordonnée ml au diametre $= y$. L'abscisse $Mi = x$.

1°. Supposé que le point K pris sur le diametre Mg soit un point de la circonférence du cercle qui passe par les 3 points infiniment proches, m, M, o. Dès lors par la propriété du cercle, on a $mi \times io = Mi \times iK$, ou $y \times io = x \times iK$; ou, ~~parce que Mi = io, à cause des points m, M, o infiniment proches~~, $yy = x \times iK$.

2°. par la propriété des diametres d'une section conique (197 et 312), on a $y^2 : 2gx :: hh : gg$. donc $x \times iK : 2gx :: hh : gg$. et parceque $iK = mK$, à cause de mi infiniment petite, on aura $x \times mK : 2gx :: hh : gg$. ou $mK : 2g :: hh : gg$. donc $mK = \frac{2hh}{g}$.

3°. Soit maintenant mn le diametre du cercle osculateur.

ayant mené la corde nK, le Δ nKM, est semblable au Δ Mcr, à cause de l'angle commun cmr, et des angles droits(*) en r et en K. donc on a mr : mc :: mK : mn. ou algébriquement : n : g :: $\frac{2hh}{g}$: 2r. donc $2r = \frac{2ghh}{gn}$ $= \frac{2hh}{n}$. et $r = \frac{hh}{n}$. Ce qui fait voir que le rayon de courbure en un point quelconque m est égal au quarré du $\frac{1}{2}$ diametre conjugué à celuy qui passe par le point donné, divisé par la perpend. tirée de ce point sur le diametre conjugué.

Cor. 1r.

381. on a demontré (311 et 315) que hn = ab. donc $n = \frac{ab}{h}$. donc substituant cette valeur de n dans l'expression $r = \frac{hh}{n}$, elle deviendra $r = \frac{h^3}{ab}$. Ce qui signifie que le rayon de courbure est égal au cube du diametre conjugué, divisé par le produit des 2 $\frac{1}{2}$ axes.

Cor. 2e.

382. Puisque $n = \frac{ab}{h}$, donc $nn = \frac{aabb}{hh}$. Or ayant mené du centre C la perpend. CR sur la tangente, et ayant deja la normale sm = n, on aura

(*) parceque Mn est perpend. à l'arc mo ou à sa tangeante MR et parconséquent au diametre conjugué hh.

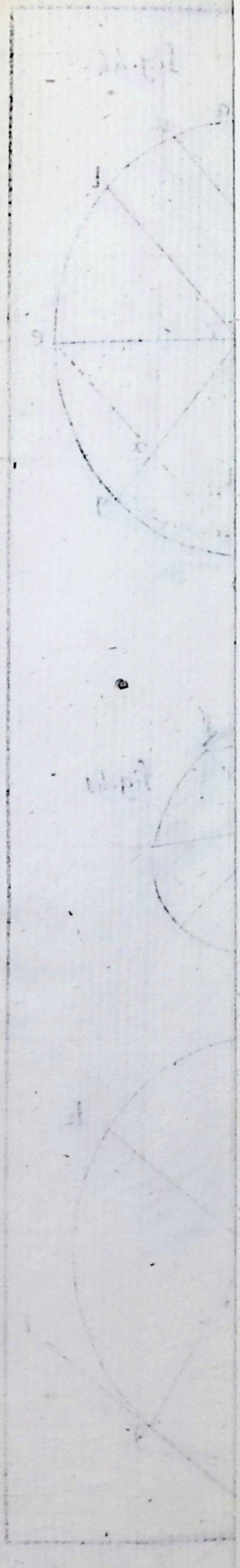
(375) $BB = CL \times Sm = MV \times Sm = mm$. Donc nn $= aa\frac{mn}{bb}$ et $bb = \frac{aam}{n}$. Donc substituant dans l'équation $r = \frac{bb}{n}$ à la place de bb sa valeur, elle deviendra $r = \frac{aam}{mn}$. Mais $\frac{ap}{2} = BB$ $= nm$. Donc $nm = \frac{ap}{2}$ et $n = \frac{ap}{2m}$ et $nn = \frac{aapp}{4mm}$

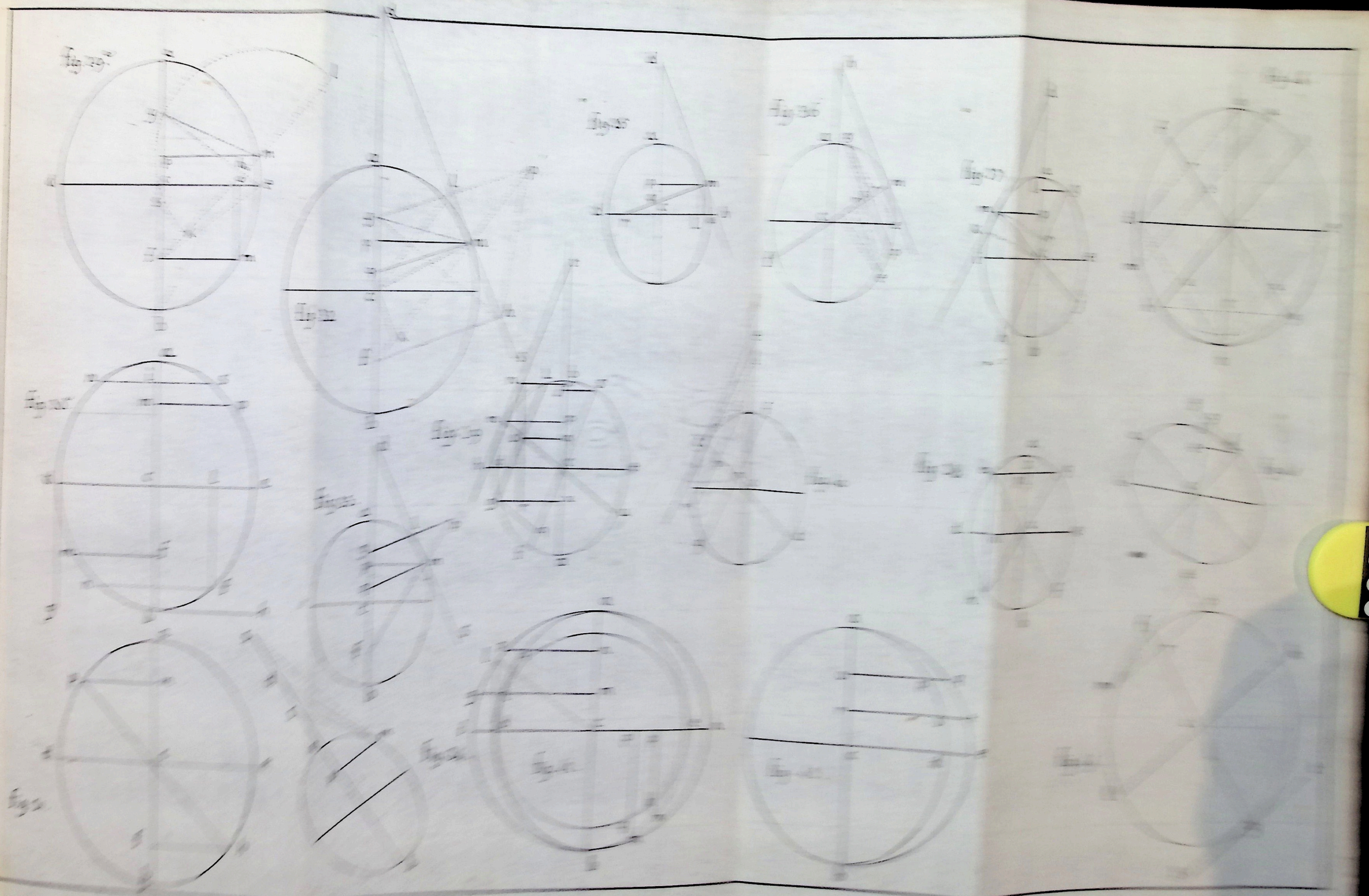
donc substituant cette valeur de nn dans l'équation $r = \frac{aam}{nn}$, elle deviendra $r = \frac{4aam^3}{a^2p^2} = \frac{4m^3}{pp} = \frac{m^3}{\frac{1}{4}pp}$.

c'est-à-dire que le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le quart du quarré du paramètre de l'axe principal.

Dans la parabole la formule du rayon de courbure est $(4px + pp) \times \frac{\sqrt{4px+pp}}{2pp}$. Car

$\overline{Sm}^2 = mm = px + \frac{1}{4}pp$ (370) donc $4\,\overline{Sm}^2 = 4px + pp$.
et $4\,\overline{Sm}^3 = 4px + pp \times \sqrt{px + \frac{1}{4}pp}$. Or en faisant
entrer 4 sous le radical, $\sqrt{px + \frac{1}{4}pp}$ sans en changer
la valeur, on a, $\frac{1}{2}\sqrt{4px + pp}$. Donc $4\,\overline{Sm}^3 = (4px$
$+ pp) \times \frac{1}{2}\sqrt{4px + pp}$: et $\frac{4\,\overline{Sm}^3}{pp} = \frac{(4px + pp)\sqrt{4px + pp}}{2pp}$. –





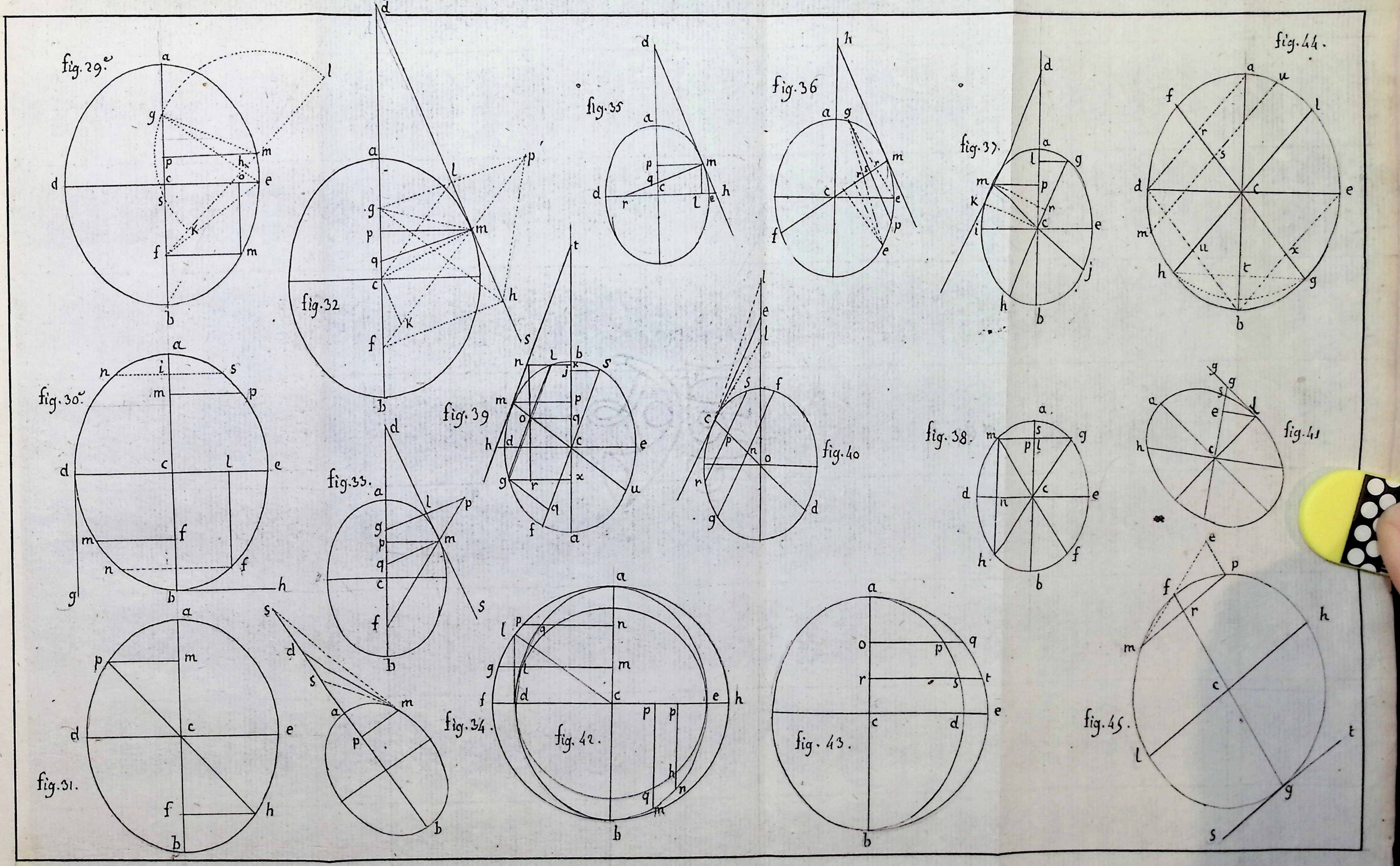


fig. 29.e
fig. 30.e
fig. 31.
fig. 32
fig. 33.
fig. 34.
fig. 35
fig. 36
fig. 37.
fig. 38.
fig. 39
fig. 40
fig. 41
fig. 42.
fig. 43.
fig. 44.
fig. 45.

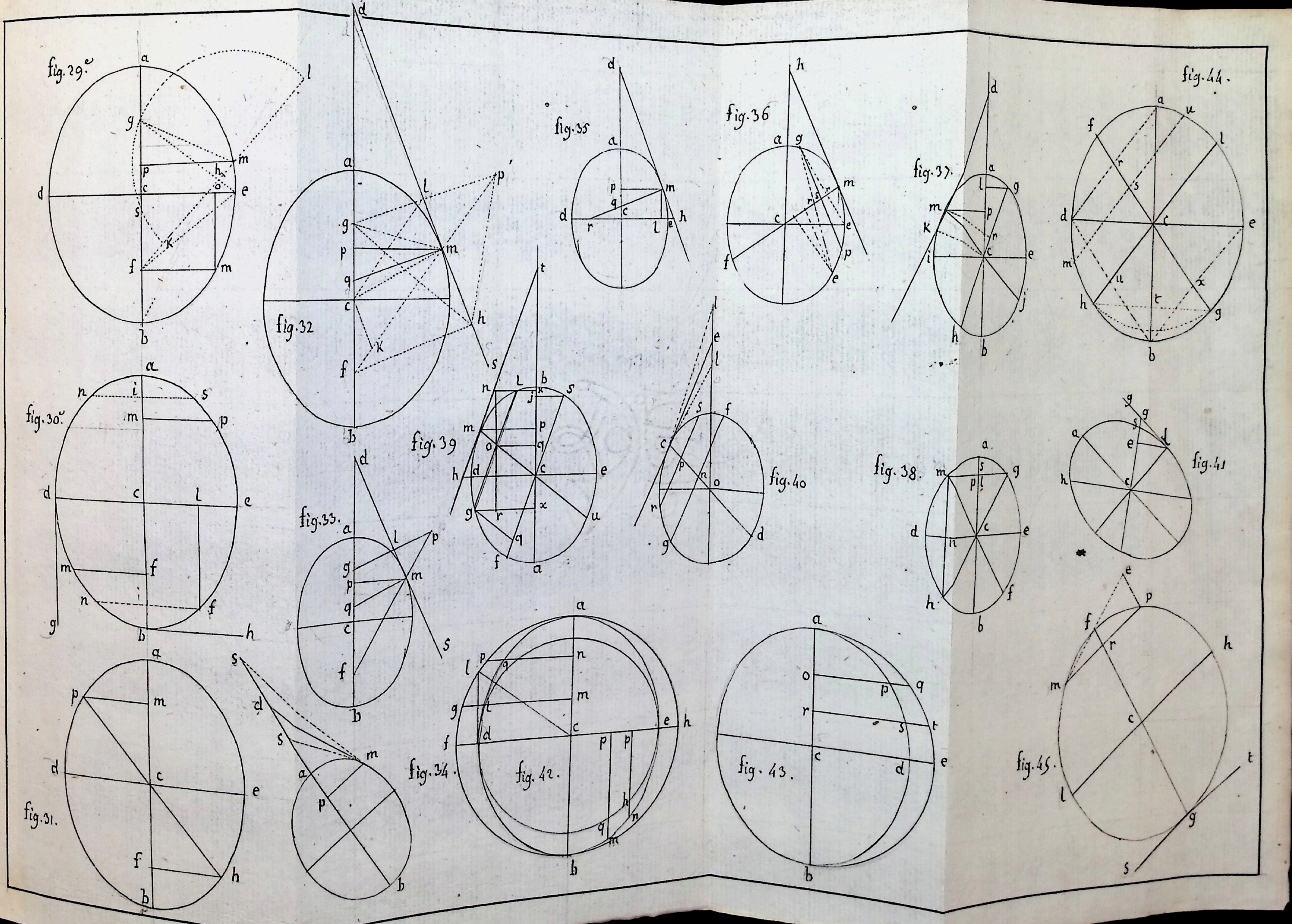


fig. 29.e
fig. 30.e
fig. 31.
fig. 32
fig. 33.
fig. 34.
fig. 35
fig. 36
fig. 37.
fig. 38.
fig. 39
fig. 40
fig. 41
fig. 42.
fig. 43.
fig. 44.
fig. 45.

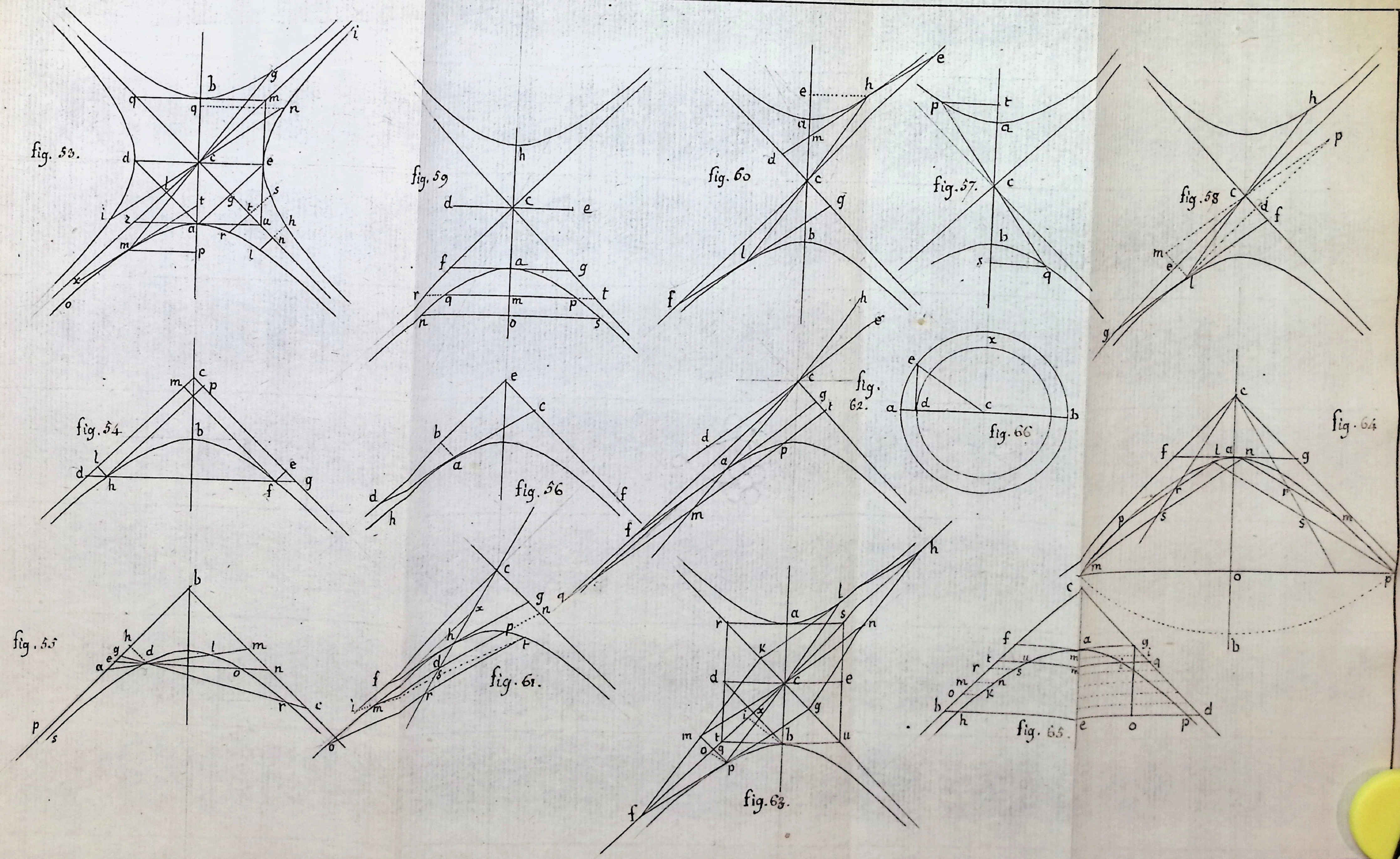


fig. 53. fig. 59 fig. 60 fig. 57. fig. 58 fig. 54. fig. 56 fig. 62. fig. 66 fig. 64 fig. 55 fig. 61. fig. 63. fig. 65.

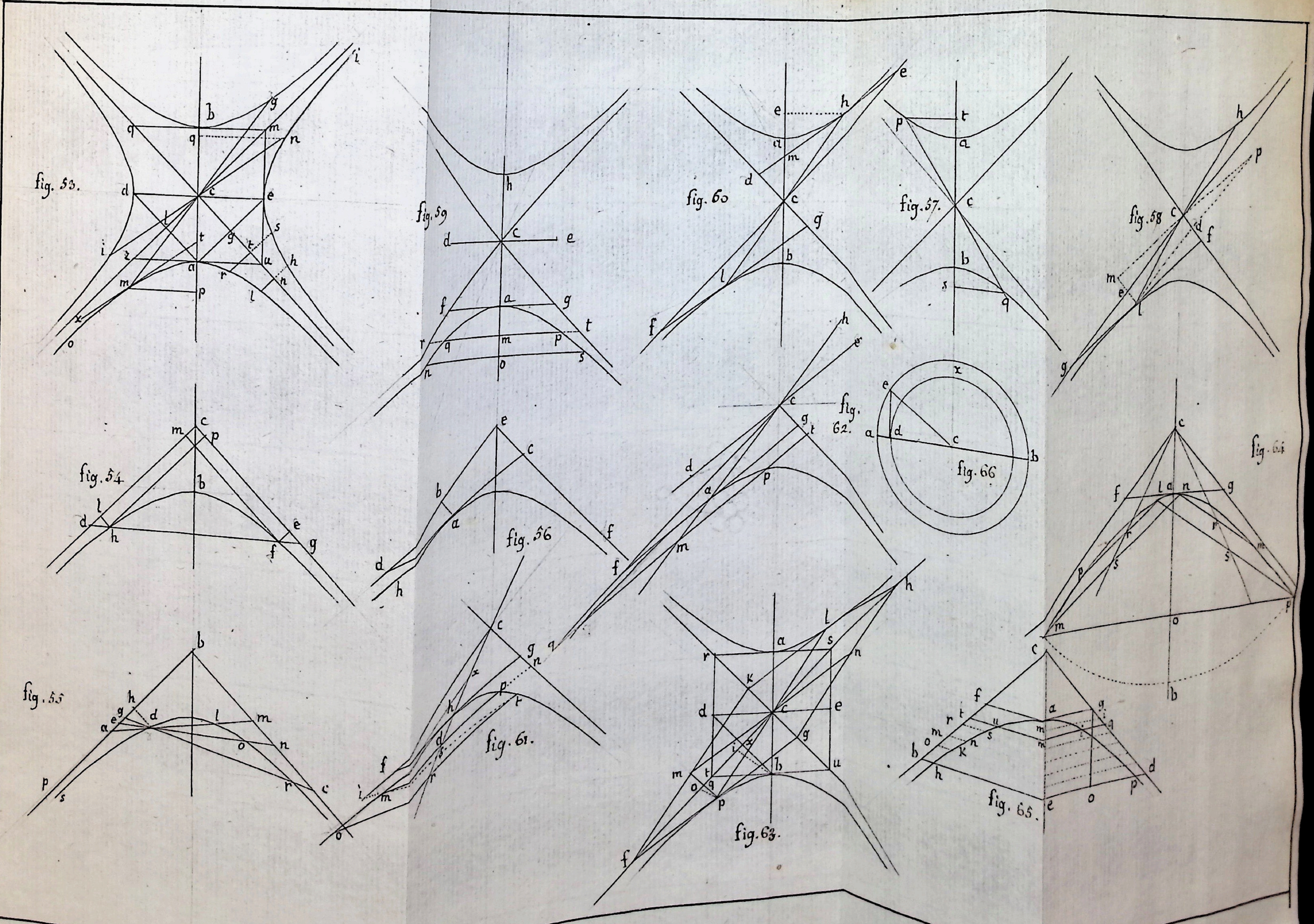


fig. 53. fig. 59 fig. 60 fig. 57. fig. 58

fig. 54 fig. 56 fig. 62. fig. 66 fig. 64

fig. 55 fig. 61. fig. 63. fig. 65.

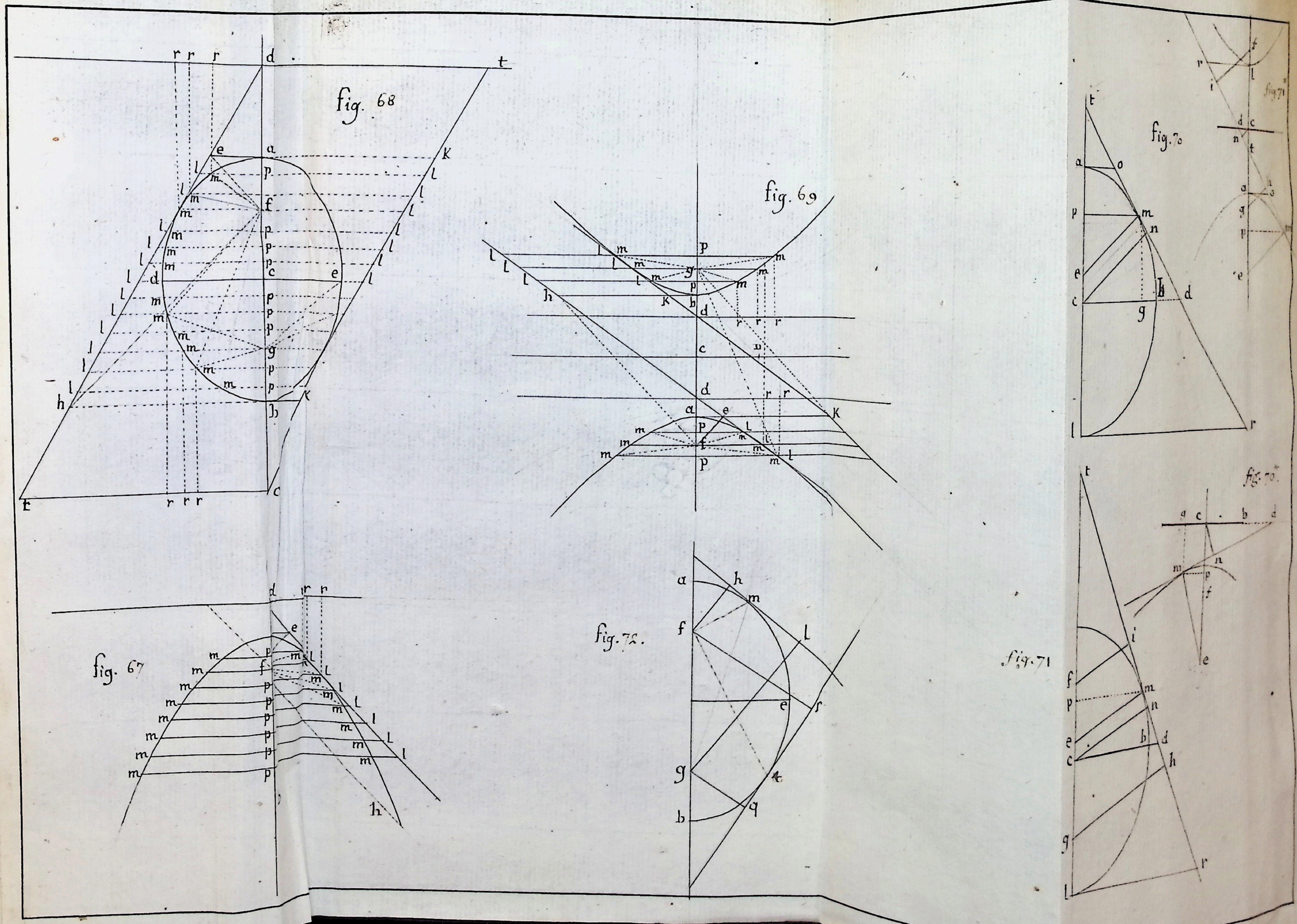


fig. 68
fig. 69
fig. 67
fig. 72.
fig. 70
fig. 71
fig. 70*
fig. 71*

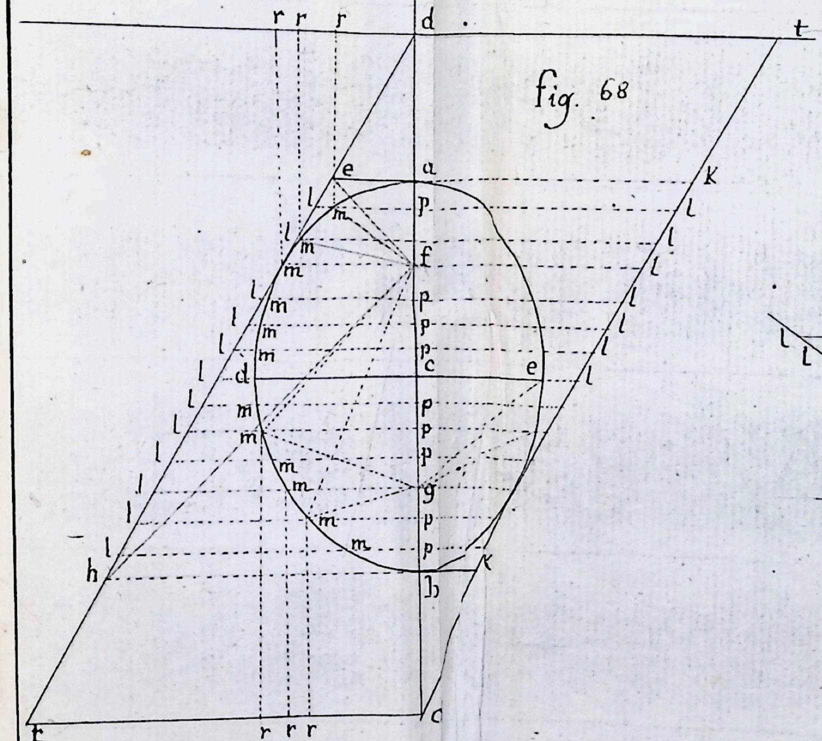


fig. 68

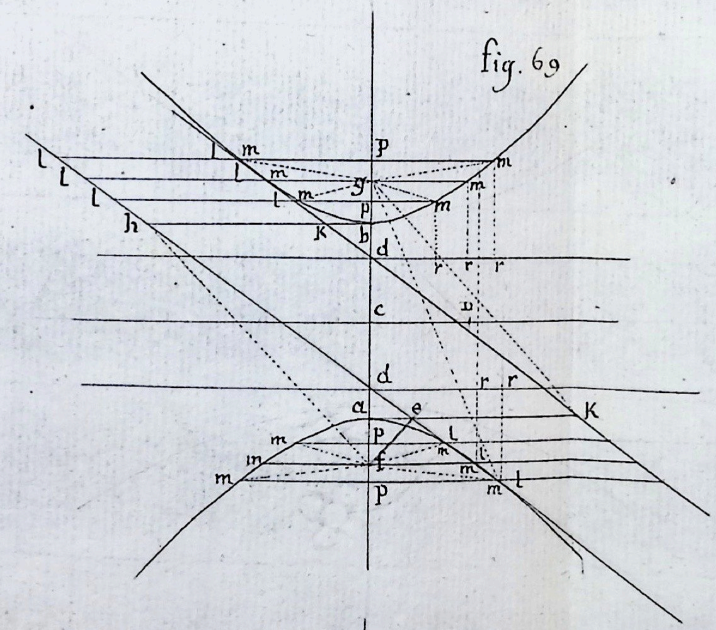


fig. 69

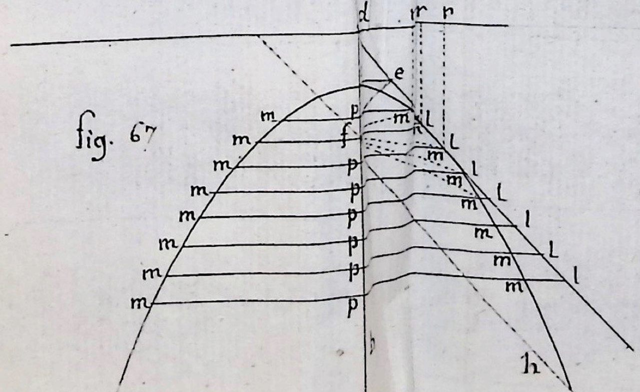


fig. 67

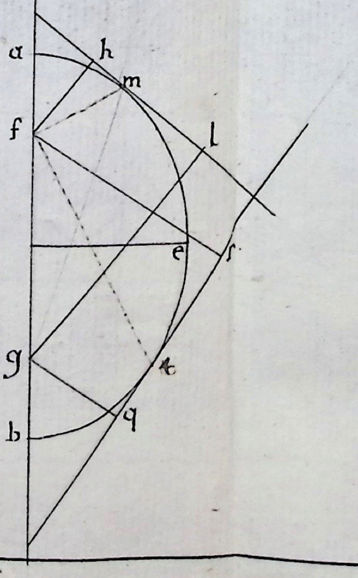


fig. 72.

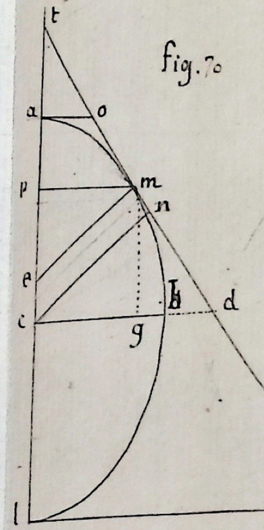


fig. 70

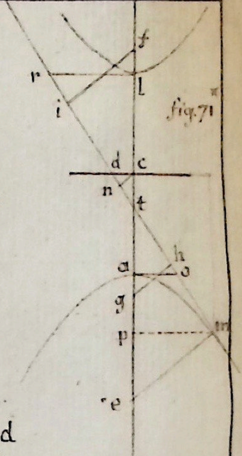


fig. 71*

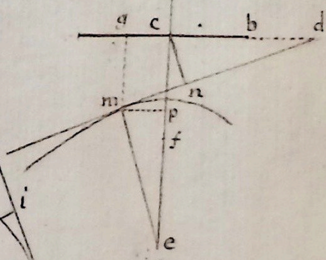


fig. 70*

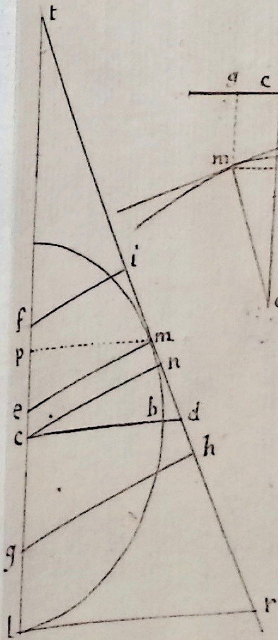


fig. 71

Soit abaissée de l'autre foyer g la ligne gl sur hl et gq sur rq

1°. Les Δ rectangles fhm, glm sont semblables, puisque l'angle $fmk = gml$

(29) Donc $fm : fh :: gm : gl$, ainsi $gl = fh \times \frac{gm}{fm}$. Donc $gl \times fh = \overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm}$: or $gl \times fh = bb = \overline{ce}^2$ (53) Donc $\overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm} = \overline{ce}^2$

Donc $\overline{fh}^2 = \overline{ce}^2 \times \frac{fm}{gm}$. —

2°. Les Δ rectangles frt, gqt étant semblables à cause de l'angle $ftr = gtq$ (29), $ft : fr :: gt : gq = fr \times \frac{gt}{ft}$. Donc $\overline{fr}^2 \times \frac{gt}{ft} = gq \times fr = \overline{ce}^2$ (53). Ainsi $\overline{fr}^2 = \overline{ce}^2 \times \frac{ft}{gt}$. Donc $\overline{fh}^2 : \overline{fr}^2 :: \frac{\overline{ce}^2 \times fm}{gm} : \frac{\overline{ce}^2 \times ft}{gt}$

$:: \frac{fm}{gm} : \frac{ft}{gt}$. Ainsi $\frac{\overline{fh}^2}{\overline{fr}^2} = \frac{fm \times gt}{gm \times ft}$. mais $\frac{fm \times gt}{gm \times ft} < \frac{fm}{ft}$; car

$\frac{fm \times gt}{gm \times ft} : \frac{fm}{ft} :: \frac{gt}{gm} : 1$; En divisant les deux termes par $\frac{fm}{ft} :: gt : gm$.

or $gt < gm$, Donc aussi $\frac{fm \times gt}{gm \times ft} < \frac{fm}{ft}$. ainsi $\frac{\overline{fh}^2}{\overline{fr}^2} < \frac{fm}{ft}$. Extrayant les racines quarrées, on aura $\frac{fh}{fr} < \frac{\sqrt{fm}}{\sqrt{ft}}$. Donc &c.

Soit abaissée de l'autre foyer g la ligne gl sur hl et gq sur rq

1°. Les Δ rectangles fhn, glm sont semblables, puisque l'angle fmk = gml

(29) Donc fm : fh :: gm : gl, ainsi $gl = fh \times \frac{gm}{fm}$. Donc $gl \times fh = \overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm}$. or $gl \times fh = bb = \overline{ce}^2$ (53) Donc $\overline{fh}^2 \times \frac{gm}{fm} = \overline{ce}^2$.

Donc $\overline{fh}^2 = \overline{ce}^2 \times \frac{fm}{gm}$. —

2°. Les Δ rectangles frt, gqt étant semblables à cause de l'angle ftr = gtq (29), ft : fr :: gt : $gq = \frac{fr \times gt}{ft}$. Donc $\overline{fr}^2 \times \frac{gt}{ft} = gq \times fr = \overline{ce}^2$ (53). Ainsi $\overline{fr}^2 = \overline{ce}^2 \times \frac{ft}{gt}$. Donc $\overline{fh}^2 : \overline{fr}^2 :: \frac{\overline{ce}^2 \times fm}{gm} : \frac{\overline{ce}^2 \times ft}{gt}$

$:: \frac{fm}{gm} : \frac{ft}{gt}$. Ainsi $\frac{\overline{fh}^2}{\overline{fr}^2} = \frac{fm \times gt}{gm \times ft}$. mais $\frac{fm \times gt}{gm \times ft} < \frac{fm}{ft}$: car

$\frac{fm \times gt}{gm \times ft} : \frac{fm}{ft} :: \frac{gt}{gm} : 1$; en divisant les deux termes par $\frac{fm}{ft}$ :: gt : gm.

or gt < gm, donc aussi $\frac{fm \times gt}{gm \times ft} < \frac{fm}{ft}$. ainsi $\frac{\overline{fh}^2}{\overline{fr}^2} < \frac{fm}{ft}$. Extrayant les racines quarrées, on aura $\frac{fh}{fr} < \frac{\sqrt{fm}}{\sqrt{ft}}$. Donc &c.

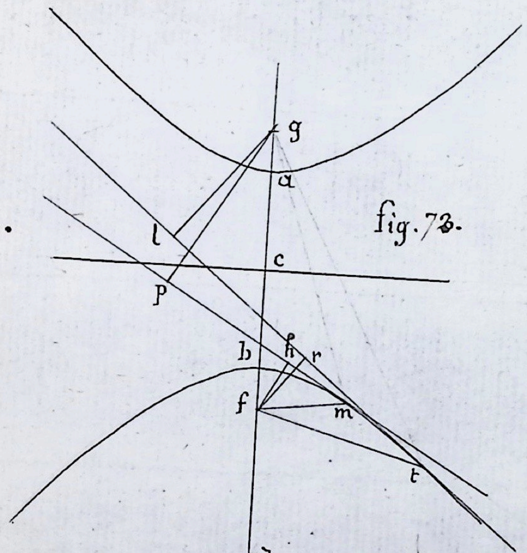


fig. 73.

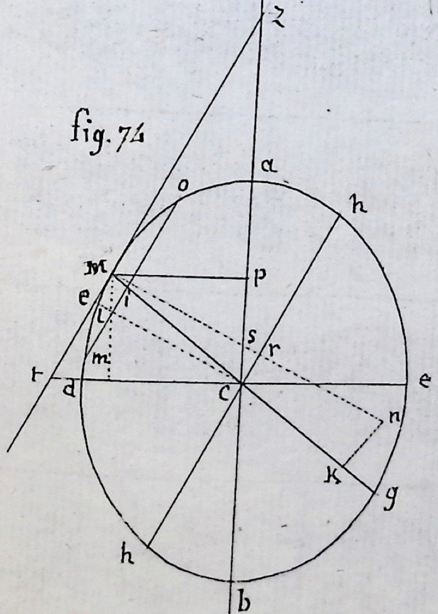
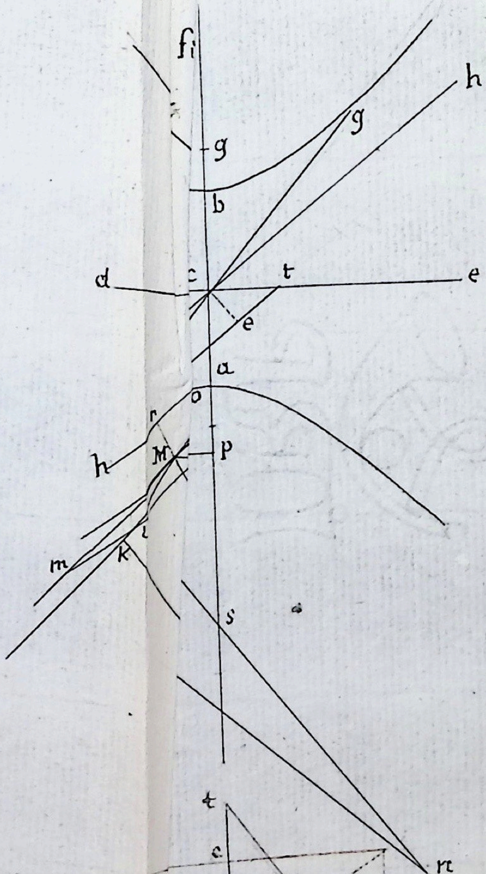


fig. 74



fi

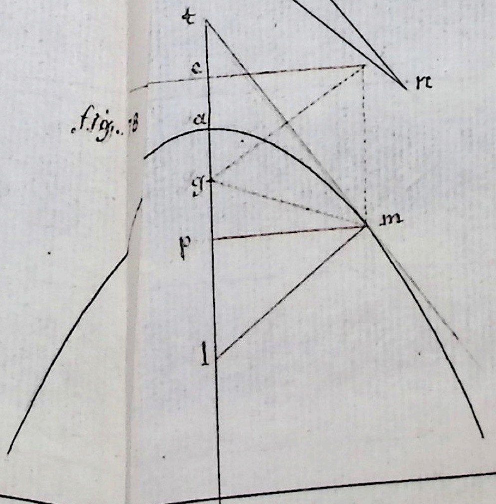


fig. 78

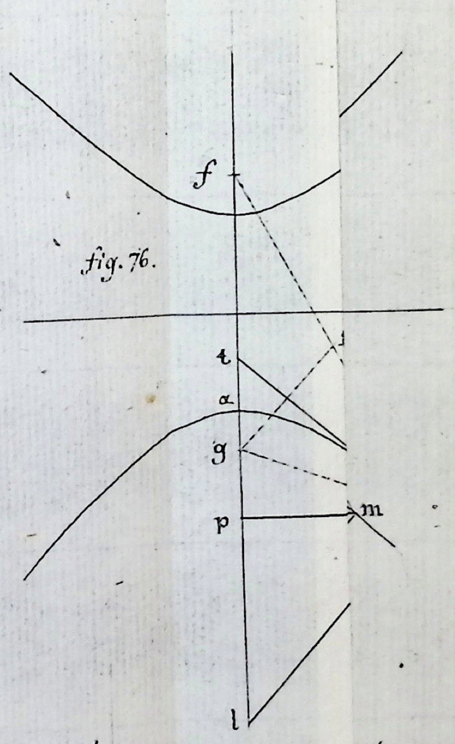


fig. 76.

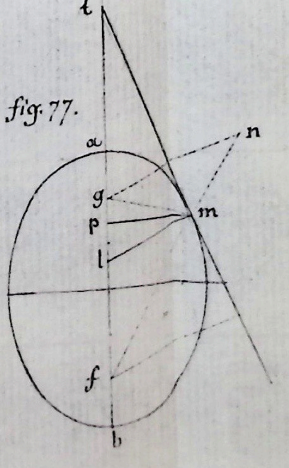
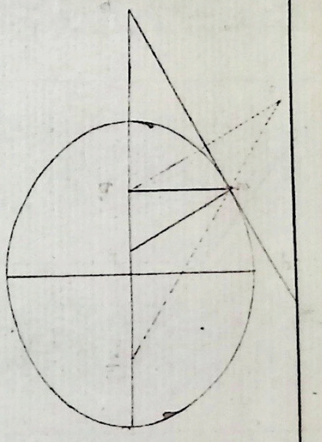


fig. 77.



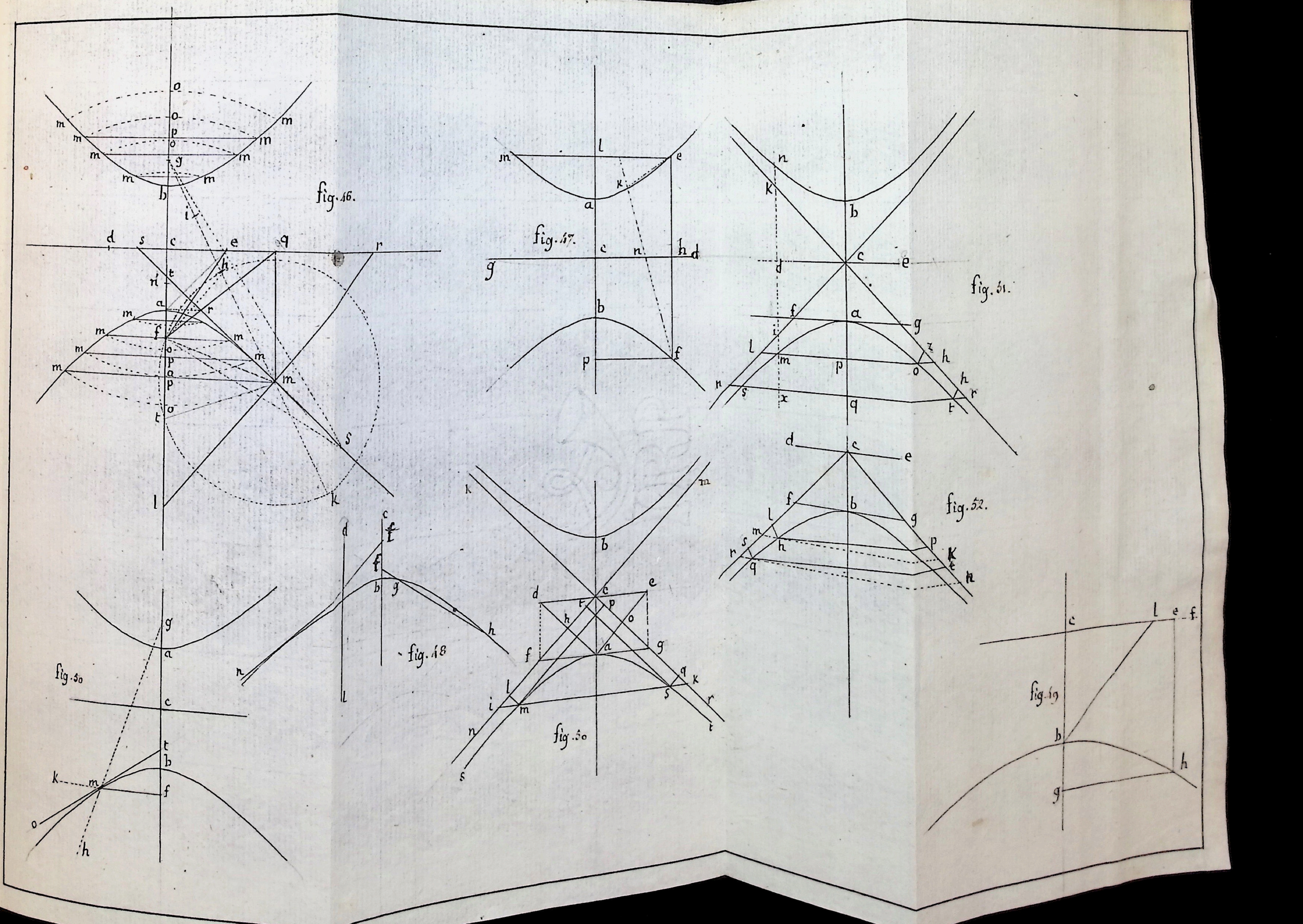


fig. 46.
fig. 47.
fig. 48
fig. 49
fig. 50
fig. 50
fig. 51.
fig. 52.

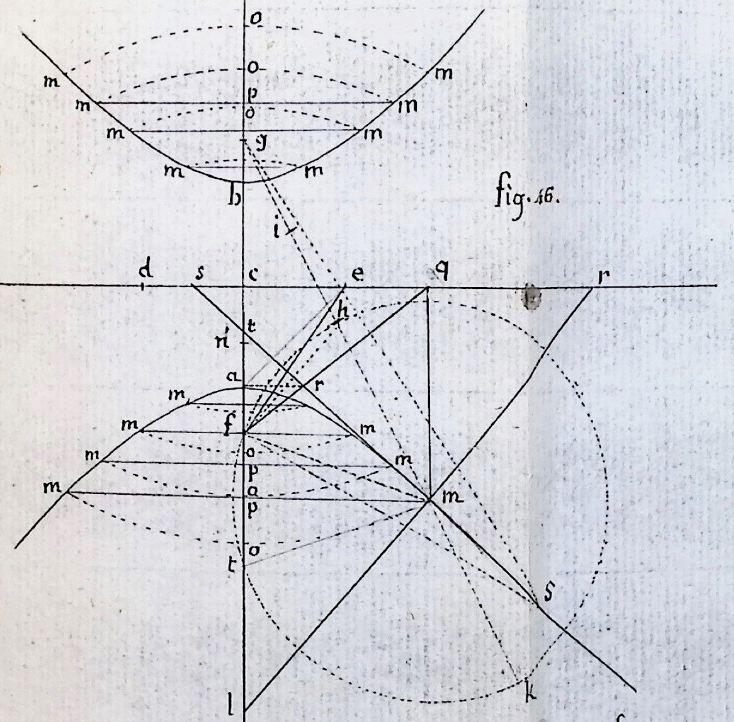


fig. 46.

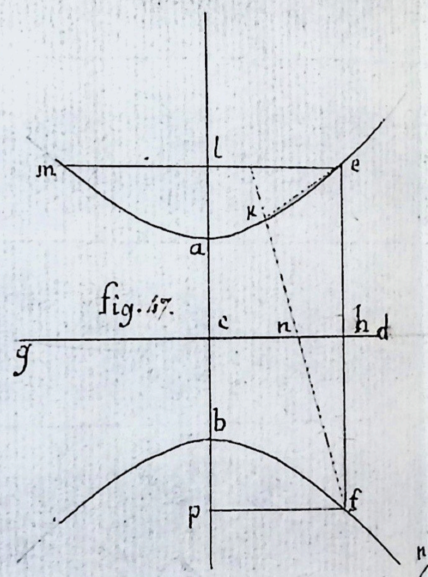


fig. 47.

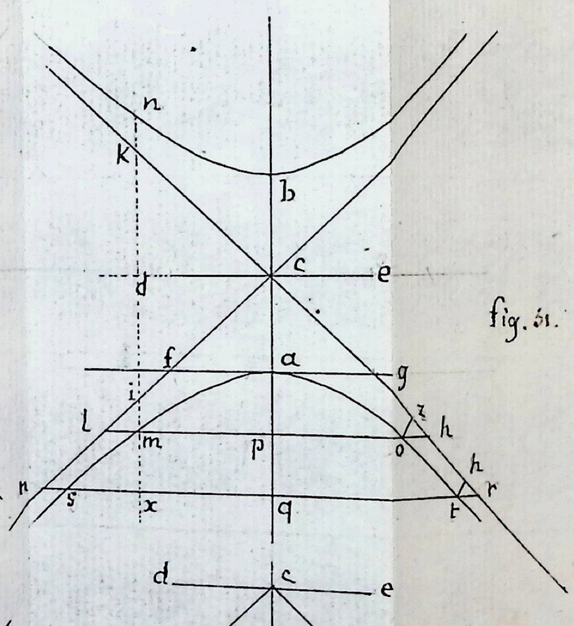


fig. 51.

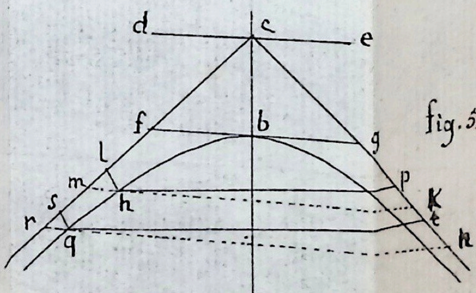


fig. 52.

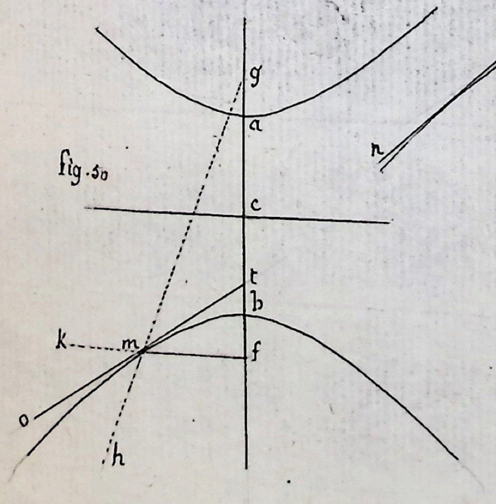


fig. 50

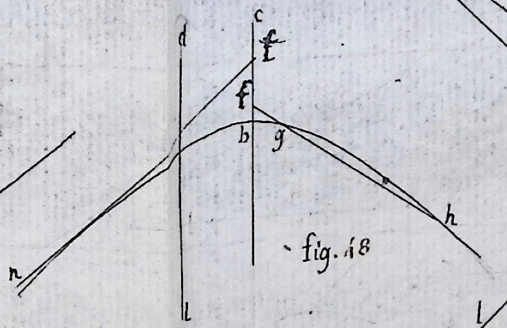


fig. 48

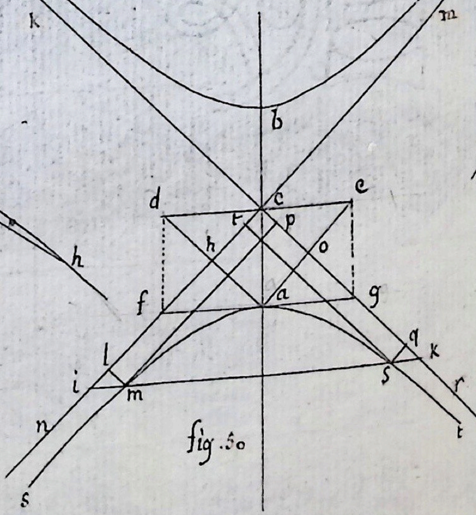


fig. 50

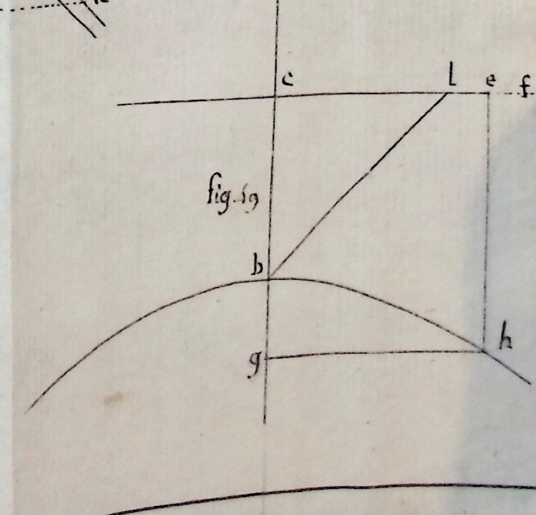


fig. 49

SP[illegible]TIO.

CONIGUES